**§21. АРКСИНУС, АРККОСИНУС, АРКТАНГЕНС І АРККОТАНГЕНС ЧИСЛА.**

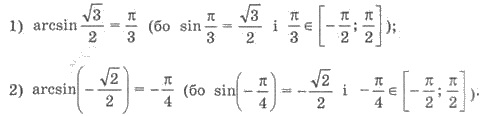
**1. Арксинус і арккосинус числа.**

Арксинусом числа а, де |а| ≤ 1, називають таке число (кут) із проміжку [-π/2; π/2], синус якого дорівнює а.

Позначають арксинус числа а так arcsin a. З означення слідує, що arcsin а = φ тоді і тільки тоді, коли:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image974.jpg

Приклад 1.

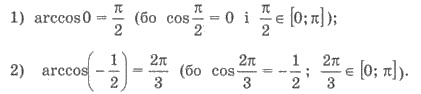


Арккосинусом числа а, де |а| ≤ 1, називають таке число (кут) із проміжку [0;π], косинус якого дорівнює а.

Позначають арккосинус числа а так arccos а. З означення слідує, що arccos а = φ тоді і тільки тоді, коли:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image976.jpg

Приклад 2.



Корисною є таблиця значень arcsin а і arccos а для деяких значень а.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| а | -1 | -http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif/2 | -http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image234.gif/2 | -1/2 | 0 | 1/2 | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image234.gif/2 | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif/2 | 1 |
| аrсsіn а | - π/2 | - π/3 | - π/4 | - π/6 | 0 | π/6 | π/4 | π/3 | π/2 |
| аrссоs а | π | 5π/6 | 3π/4 | 2π/3 | π/2 | π/3 | π/4 | π/6 | 0 |

**2. Арктангенс і арккотангенс.**

Арктангенсом числа а, де а - будь-яке число, називають таке число (кут) із проміжку (-π/2; π/2), тангенс якого дорівнює а.

Позначають арктангенс числа а так аrctg а. З означення слідує, що arctg а = φ тоді і тільки тоді, коли:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image978.jpg

Приклад 1. http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image979.jpg

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image980.jpg

Арккотангенсом числа а, де а - будь-яке число, називають таке число (кут) із проміжку (0;π), котангенс якого дорівнює а.

Позначають арккотангенс числа а так аrсctg а. З означення слідує, що arcctg a = φ тоді і тільки тоді, коли:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image981.jpg

Приклад 2. http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image982.jpg

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image983.jpg

Корисною є таблиця значень аrctg а і аrссtg а для деяких значень а.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| а | -http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif | -1 | -http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif/3 = -1/http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif | 0 | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif/3 = 1/http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif | 1 | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif |
| аrсtg а | - π/3 | - π/4 | - π/6 | 0 | π/6 | π/4 | π/3 |
| аrссtg а | 5π/6 | 3π/4 | 2π/3 | π/2 | π/3 | π/4 | π/6 |

**§22. НАЙПРОСТІШІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ.**

**1. Рівняння sin t = а.**

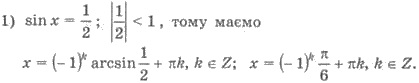
Схему розв’язування рівняння sіn t = а, де а — деяке число подамо у вигляді таблиці.

|  |  |
| --- | --- |
| sіn t = а, а - число | |
| а | Розв’язки рівняння |
| а < -1 або а > 1 | Рівняння не має розв’язків |
| а = -1 | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image984.jpg |
| а = 0 | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image985.jpg |
| а = 1 | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image986.jpg |
| |а| < 1, а ≠ 0 | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image987.jpg |

Приклад. Розв’яжіть рівняння:



Розв’язання.



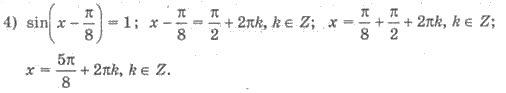
http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image990.jpg маємо

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image991.jpg

Відповідь цього рівняння можна знайти також у вигляді

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image992.jpg

3) sin x = 1,8. Оскільки 1,8 > 1, то рівняння не має розв’язків.

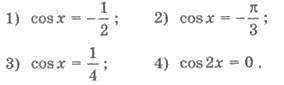


**2. Рівняння cos t = а.**

Схему розв’язування рівняння cost = a, де а — деяке число подамо у вигляді таблиці.

|  |  |
| --- | --- |
| cos t = а, а - число | |
| а | Розв’язки рівняння |
| а < -1 або а > 1 | Рівняння не має розв’язків |
| а = -1 | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image994.jpg |
| а = 0 | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image995.jpg |
| а = 1 | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image996.jpg |
| |а| < 1, а ≠ 0 | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image997.jpg |

Приклад. Розв’яжіть рівняння:



Розв’язання.

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image999.jpg

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1000.jpg

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1001.jpg оскільки http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1002.jpg то рівняння не має розв’язків.

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1003.jpg Маємо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1004.jpg Значення arccos ¼ не можна знайти точно, а лише наближено (наприклад, за допомогою калькулятора). Розв’язуючи прикладні задачі, значення arccos ¼ ≈ 1,3181 і записують розв’язок наближено:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1005.jpg

У математиці ж залишають такий розв’язок:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1006.jpg

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1007.jpg

**3. Рівняння tg t = а.**

Множину розв’язків рівняння tgt = а, де а — будь-яке число записують у вигляді: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1008.jpg

Приклад. Розв’яжіть рівняння: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1009.jpg

Розв’язання. http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1010.jpg

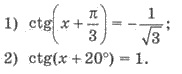
http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1011.jpg Поділимо ліву і праву частину рівняння на 2, маємо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1012.jpg Цю відповідь прийнято записувати у вигляді:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1013.jpg

**4. Рівняння ctg t = а.**

Множину розв’язків рівняння ctg t = а, де а — будь-яке число записують у вигляді: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1014.jpg

Приклад. Розв’яжіть рівняння:



Розв’язання.

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1016.jpg

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1017.jpg

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1018.jpg Оскільки необхідно знайти кут х такий, що котангенс кута х + 20° дорівнює 1, то х — кут у градусах. Тому формулою для запису множини розв’язків треба користуватися в іншому вигляді: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1019.jpg http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1020.jpg

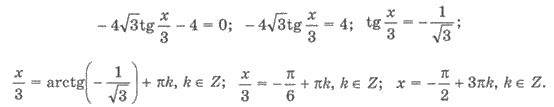
Отже, http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1021.jpghttp://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1022.jpg

**5. Тригонометричні рівняння, які зводяться до найпростіших.**

За допомогою алгебраїчних перетворень або формул тригонометрії деякі рівняння можуть бути зведені до найпростіших тригонометричних рівнянь.

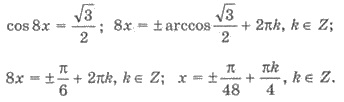
Приклад 1. Розв’яжіть рівняння: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1023.jpg

Розв’язання. Оскільки http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1024.jpg то маємо



Приклад 2. Розв’яжіть рівняння: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1026.jpg

Розв’язання. Використовуючи формулу подвійного кута для спрощення лівої частини рівняння, маємо



Приклад 3. Розв’яжіть рівняння: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1028.jpg

Розв’язання. Спрощуючи ліву частину рівняння, маємо: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1029.jpg

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1030.jpg

**§23. МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ.**

**1. Заміна змінних у тригонометричних рівняннях.**

Якщо тригонометричне рівняння містить лише одну тригонометричну функцію з одним і тим самим аргументом, то позначивши цю функцію новою змінною, отримаємо алгебраїчне рівняння відносно цієї змінної.

Приклад. Розв’яжіть рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1031.jpg

Розв’язання. Позначимо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1032.jpg Маємо рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1033.jpghttp://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1034.jpg Оскільки |t| ≤ 1, то підходить лише перший корінь. Маємоhttp://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1035.jpg

**2. Зведення тригонометричного рівняння до однієї функції одного того самого аргументу.**

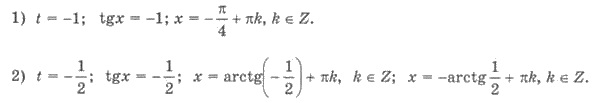
Досить часто після використання відповідних тригонометричних формул вдається звести рівняння до однієї функції одного й того самого аргументу, після чого застосувати заміну змінних.

Якщо в рівняння входить лише і tg х i ctg x, то після застосування формули ctg x = 1/tg x отримаємо рівняння, що містить лише tg x.

Приклад 1. Розв’яжіть рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1036.jpg

Розв’язання. ОДЗ рівняння складається з усіх значень х, крім тих, для яких cos х = 0 або sin x = 0. На ОДЗ рівняння маємо ctg x = 1/tg x.Запишемо отримане рівняння

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1037.jpg та введемо заміну tg x = t. Маємо рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1038.jpg коренями якого є числа -1 і -1/2.



Якщо в рівняння входить лише sin x і cos x, причому хоча б одна з функцій тільки у парних степенях (наприклад, sin x), то застосовуємо формулу sin2 х = 1 - cos2 х з подальшою заміною cos х = t. Аналогічно застосовуємо формулу cos2 х = 1 - sin2 х, якщо cos х входить у рівняння лише у парних степенях.

Приклад 1. Розв’яжіть рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1040.jpg

Розв’язання. Оскільки http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1041.jpg то маємо

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1042.jpg

Робимо заміну http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1043.jpg Маємо

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1044.jpg

Другий корінь не задовольняє рівняння, оскільки |t| ≤ 1.

Отже, http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1045.jpg

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1046.jpg

Якщо в тригонометричне рівняння входять лише cos 2х і cos x, то застосовуємо формулу cos 2х = 2 cos2 х - 1 і вводимо заміну cos х = t.

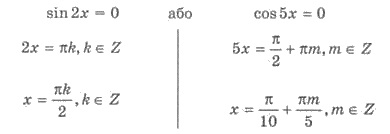
Якщо в тригонометричне рівняння входять лише cos 2x і sin х, то застосовуємо формулу cos 2х = 1 – 2 sin2x і вводимо заміну sinx = t.

Приклад 3. Розв’яжіть рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1047.jpg

Розв’язання. Маємо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1048.jpg заміна http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1049.jpg

Рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1050.jpg має корені http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1051.jpg з яких лише перший задовольняє умову |t| ≤ 1. Отже,

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1052.jpg



**4. Однорідні тригонометричні рівняння та рівняння, що зводяться до однорідних.**

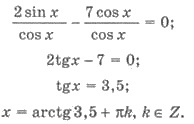
Тригонометричні рівняння a sin х + b cos х = 0, де а і b — числа, а ≠ 0, b ≠ 0, називають однорідними тригонометричними рівняннями 1-го степеня відносно sin х і cos х.

Ті значення х, при яких cos x = 0, не є коренями рівняння. Дійсно у разі cos х = 0 рівняння набуває вигляду a sin x = 0. Оскільки а ≠ 0, то матимемо sin x = 0. Проте sin x і cos x не можуть одночасно дорівнювати нулю.

Поділивши ліву і праву частини рівняння a sin x + b cos x = 0 на cos x ≠ 0, матимемо a tg x + b = 0, після чого закінчуємо розв’язання.

Приклад 1. Розв’яжіть рівняння 2 sin x – 7 cos x = 0.

Розв’язання. Поділимо обидві частини рівняння на cos x ≠ 0. Матимемо

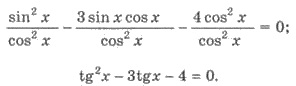


Тригонометричне рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1060.jpg де а, b, с — числа, з яких хоча б два відмінні від нуля, називають однорідними тригонометричними рівняннями другого степеня відносно sin x і cos x. Сума показників степенів у всіх доданків при sin x і cos x дорівнює двом.

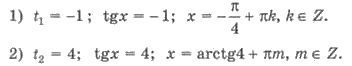
Якщо а ≠ 0, то рівняння (по аналогії з однорідним 1-го степеня) розв’язують, поділивши на cos2 х ≠ 0 з подальшою заміною tg x = t. Якщо ж а = 0, то виносимо cos х за дужки та застосовуємо прийом відомий нам з попереднього пункту.

Приклад 2. Розв’яжіть рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1061.jpg

Розв’язання. Ті значення х, при яких cos x = 0, не є коренями рівняння. Розділимо ліву і праву частини рівняння на cos2 х ≠ 0. Маємо



Заміна tg x = t, маємо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1063.jpg



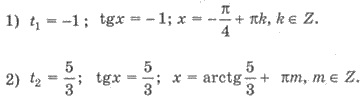
До однорідних можуть зводитися рівняння, які мають зовнішній вигляд, відмінний від зовнішнього вигляду однорідного рівняння. При цьому часто застосовують формули тригонометричних функцій подвійного кута та тотожність http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1065.jpg

Приклад 3. Розв’яжіть рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1066.jpg

Розв’язання. Застосовуємо формулу sin 2х = 2 sin x cos x і таку тотожність http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1067.jpg Маємо

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1068.jpg

Поділимо ліву і праву частини на cos2 х ≠ 0. Маємо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1069.jpg Заміна tg x = t. Рівняння 3t2 —2t — 5 = 0 має корені t1 = -1; t2 = 5/3. Тоді



**5. Рівняння виду a sin х + b cos х = с.**

Розглянемо рівняння a sin x + b cos x = с, де а ≠ 0, b ≠ 0, с ≠ 0 — деякі числа. Є багато способів розв’язування такого рівняння. Покажемо один із них.

За допомогою формул

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1071.jpg

дане рівняння можна звести до однорідного.

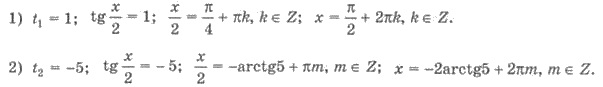
Приклад. Розв’яжіть рівняння 2 sin х - 3 cos x = 2.

Розв’язання. Маємо

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1072.jpg

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1073.jpg

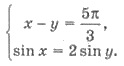
Заміна http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1074.jpg Далі



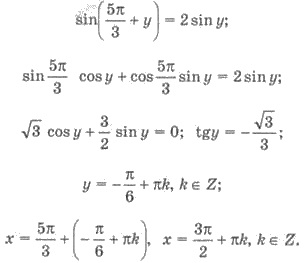
**§24. СИСТЕМИ, ЩО МІСТЯТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ.**

При розв’язуванні систем, що містять тригонометричні рівняння, використовують прийоми розв’язування систем (спосіб підстановки, спосіб додавання заміну змінних) та методи розв’язування тригонометричних рівнянь.

Приклад 1. Розв’яжіть систему рівнянь



Розв’язання. Виражаючи з першого рівняння х через у, маємо: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1077.jpg і підставляючи у друге маємо

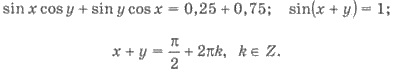


Отже, http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1079.jpg - розв’язок системи.

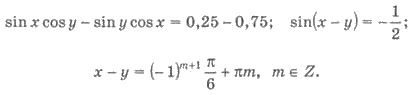
Приклад 2. Розв’яжіть систему рівнянь

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1080.jpg

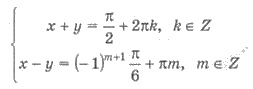
Розв’язання. Додамо рівняння системи, маємо



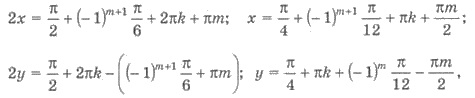
Віднімаючи від першого рівняння системи друге, отримаємо



Маємо



Далі



де k http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image013.gif Z; m http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image013.gif Z.

**§25. НАЙПРОСТІШІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НЕРІВНОСТІ.**

Нерівності, що містять невідомі під знаками тригонометричних функцій, називають тригонометричними нерівностями.

Прикладами тригонометричних нерівностей є нерівності

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1085.jpg тощо.

До найпростіших будемо відносити нерівності виду http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1086.jpg та інші, у яких на місці знака > стоїть один із знаків ≥, < або ≤. Загальні формули для розв’язування цих нерівностей є досить громіздкими. Тому розглянемо методи розв’язування цих нерівностей на прикладах. Для наочності будемо використовувати одиничне коло, лінії тангенса і котангенса.

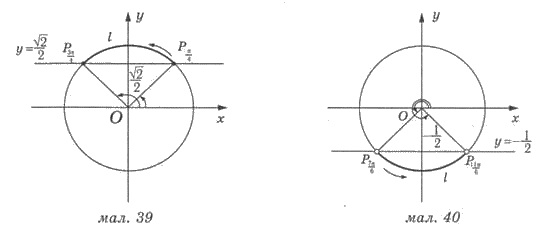
Приклад 1. Розв’язати нерівність http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1087.jpg

Розв’язання. sin t - це ордината точки одиничного кола, що відповідає куту t. Спочатку позначимо на одиничному колі всі точки, ординати яких більші за http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image234.gif/2; ці точки знаходяться вище прямої у = http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image234.gif/2 (мал. 39). Множина всіх таких точок — дуга l. Якщо рухатися по цій дузі проти руху годинникової стрілки, то початкова точка дуги l відповідає куту аrсsin http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image234.gif/2 = π/4, а кінцева — http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1088.jpg Кути, що відповідають цим точкам, входять у відповідь (оскільки знак нерівності ≥), а тому на малюнку точки позначені жирно. Таким чином, нерівність sint ≥ http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image234.gif/2 задовольняють всі значення t такі, що http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1089.jpg Оскільки синус є функцією періодичною з найменшим додатним періодом 2π, то множину всіх розв’язків нерівності отримаємо, додавши до чисел π/4 і 3π/4 числа виду 2πk, k http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image013.gif Z. Отже, маємо:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1090.jpg

Відповідь можна подати і так:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1091.jpg



Приклад 2. Розв’язати нерівність http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1093.jpg

Розв’язання. Позначимо 2х = t, маємо нерівність sіn t < -1/2. Позначимо на одиничному колі всі точки, ординати яких менші за -1/2, це точки дуги l, які розташовані нижче прямої у = -1/2 (мал. 40). Кінці цієї дуги — точки, ординати яких дорівнюють -1/2; кути, що відповідають цим точкам, не входять у відповідь, оскільки знак нерівності “<“. Тому точки на малюнку «виколоті». Якщо рухатися по дузі l проти годинникової стрілки, то початкова

точка дуги l відповідає куту http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1094.jpg a кінцева – куту http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1095.jpg

Враховуючи періодичність, маємо:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1096.jpg

Повертаємося до змінної х:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1097.jpg

Розділимо всі три частини подвійної нерівності на 2. Маємо:

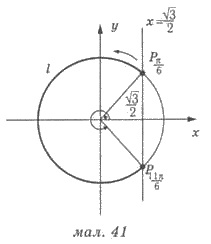
http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1098.jpg

Приклад 3. Розв’язати нерівність http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1099.jpg

Розв’язання. cos t — це абсциса точки одиничного кола, що відповідає куту t. Позначимо на одиничному колі всі точки, абсциси яких менші заhttp://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif/2, ці точки розташовані лівіше прямої х = http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif/2 (мал. 41), утворюють дугу l. Кути, що відповідають крайнім точкам дуги, входять у відповідь (оскільки знак нерівності ≤), тому точки на малюнку позначені жирно. При русі проти годинникової стрілки початкова точка дуги l відповідає кутуarccos http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif/2 = π/6, а кінцева — куту http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1100.jpg

Враховуючи періодичність косинуса, отримаємо розв’язки нерівності:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1101.jpg



Приклад 4. Розв’язати нерівність http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1103.jpg

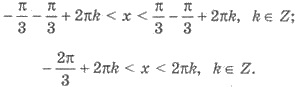
Розв’язання. Позначимо х + π/3 = t, маємо cos t > 1/2. На малюнку 42 виділено відповідну дугу l, її кінцева точка відповідає куту arccos 1/2 =π/3, a початкова — куту arccos 1/2 = = -π/3. Маємо:

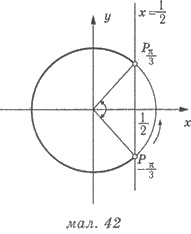
http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1104.jpg

Повертаємося до змінної х:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1105.jpg

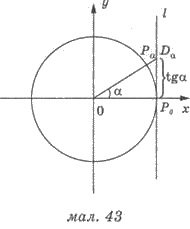
Віднімемо від трьох частин подвійної нерівності π/3. Маємо:





Для ілюстрації розв’язків нерівностей, у яких в лівій частині знаходиться tg t, а в правій — число, ознайомимося з лінією тангенсів.

Розглянемо пряму l, яка є дотичною до одиничного кола і проходить через точку (1;0) (мал. 43). Нехай при повороті на кут α початковий радіус ОР0 переходить у радіус ОРα. Нехай пряма ОРα перетинає пряму l у точці Dα. Тоді ордината точки Dα дорівнює тангенсу α.

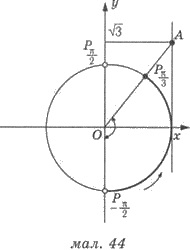


Приклад 5. Розв’язати нерівність tg t ≤ http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif.

Розв’язання. Період функції тангенс дорівнює π,тому спочатку знайдемо розв’язки нерівності на проміжку (-π/2;π/2), а потім використаємо періодичність.

Проведемо лінію тангенсів, tg t - це ордината точки лінії тангенсів, що відповідає куту t. Позначимо на лінії тангенсів точку, ордината якої дорівнює http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif — точку А (мал. 44). Ця точка відповідає куту http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1109.jpg а точки лінії тангенсів, у яких ординати менші за http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif, відповідають кутам від -π/2 до π/3. Зауважимо, що кут π/3 буде входити у відповідь (оскільки знак нерівності ≤), а кут -π/2 - не буде, оскільки tg (-π/2) — неіснує. Отже на проміжку (-π/2;π/2) нерівність tg t ≤ http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif має розв’язки http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1110.jpg Враховуючи періодичність, маємо:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1111.jpg

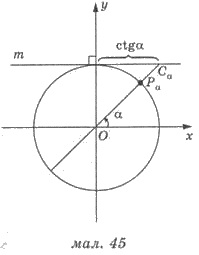


Приклад 6. Розв’язати нерівність tg t ≥ http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif.

Розв’язання. Використовуючи малюнок 44 та періодичність, маємо:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1113.jpg

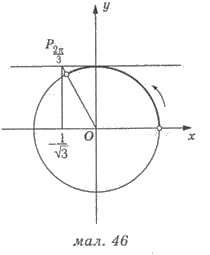
Пряму m, яка проходить через точку (0;1) перпендикулярно до осі ординат, називають лінією котангенсів (мал. 45). Абсциса точки Сα перетину прямої ОРα з лінією котангенсів дорівнює котангенсу α.



Приклад 7. Розв’язати нерівність ctg t > -1/http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif.

Розв’язання (мал. 46). Використовуючи лінію котангенсів, отримаємо розв’язок нерівності на проміжку http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1115.jpg

Далі використаємо періодичність: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1116.jpg



**КОНТРОЛЬНИЙ ТЕСТ № 6**