**§18. ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ.**

Рівняння називають ірраціональними, якщо воно містить невідомі під знаком кореня.

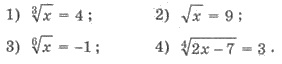
Розглянемо деякі види ірраціональних рівнянь та методи їх розв’язування.

**1. Рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image871.gif= a , a - число.**

Схему розв’язування рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image871.gif=a, де а — число, п ≥ 2 — натуральне число подано у вигляді таблиці.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image871.gif=**a, а - число, n ≥ 2 - натуральне число | | |
| n - парне | | n - непарне |
| а ≥ 0 | а < 0 | f(x) = аn |
| f(x) = аn | рівняння не має розв’язків |

Приклад. Розв’яжіть рівняння:



Розв’язання.

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image873.jpg

3) рівняння не має розв’язків;

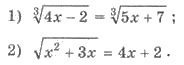
http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image874.jpg

**2. Рівняння виду http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image871.gif= http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image875.gif.**

Схему розв’язання рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image871.gif=http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image875.gif, n ≥ 2 - натуральне число, подамо у вигляді таблиці.

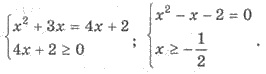
|  |  |
| --- | --- |
| **http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image871.gif= http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image875.gif**, n ≥ 2 - натуральне число | |
| n - парне | n - непарне |
| http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image876.jpg | f(x) = g(x) |

Приклад. Розв’яжіть рівняння:



Розв’язання. 1) Маємо 4х - 2 = 5х + 7; х = -9;

2) Рівняння рівносильне системі:



З першого рівняння маємо х1 = -1; х2 = 2. Але умову х ≥ ½ задовольняє лише другий корінь. Отже, х = 2 - єдиний корінь рівняння.

**3. Рівняння виду http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image871.gif= g(x).**

Подамо у вигляді таблиці схему розв’язання рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image871.gif**=**g(x), де n ≥ 2 - натуральне число.

|  |  |
| --- | --- |
| http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image871.gif=http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image875.gif, n ≥ 2 - натуральне число | |
| n - парне | n - непарне |
| http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image879.jpg | f(х) = [g(х)]п |

Приклад. Розв’яжіть рівняння:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image880.jpg

Розв’язання. 1) Піднесемо ліву і праву частини рівняння до третього степеня http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image881.jpg

2) Рівняння рівносильне системі

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image882.jpg

Рівняння х2 - 9х + 18 = 0 має корені х1 = 3; х2 = 6. Але умову х ≤ 4 задовольняє лише перший з них. Отже, х = 3 - єдиний корінь рівнянн

**4. Розв’язання ірраціональних рівнянь, що містять кілька квадратних коренів.**

Розв’язання рівняння виду http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image883.jpg де а - число, http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image884.jpg та подібні доцільно починати з ОДЗ рівняння. Далі можна скористатись одним із двох наступних способів розв’язання.

І спосіб. Забезпечуємо невід’ємність лівої і правої частини рівняння (якщо необхідно, то для цього переносимо доданки з однієї частини рівняння в іншу). Підносимо ліву і праву частини отриманого рівняння до квадрата. Оскільки вони невід’ємні, то таке перетворення рівняння є рівносильним. Після спрощень дістаємо один із раніше розглянутих типів рівнянь.

Приклад. Розв’язати рівняння: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image885.jpg

Розв’язання. ОДЗ рівняння задається системою http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image886.jpg з якої дістаємо х ≥ 2.

Перенесемо радикал http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image887.gif у праву частину рівняння: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image888.jpg Ліва і права частини отриманого рівняння - невід’ємні. Піднесемо до квадрата ліву і праву частини рівняння: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image889.jpghttp://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image890.jpg

Оскільки х = 3 належить ОДЗ початкового рівняння, то є його єдиним коренем.

Відповідь: х = 3.

II спосіб полягає в тому, що після знаходження ОДЗ рівняння ліву і праву його частини підносять до квадрата, не вимагаючи їх невід’ємності. Але такий спосіб може привести до появи сторонніх коренів. Тому можна запропонувати два підходи. Перший полягає в тому, що отримані корені треба перевірити, підставивши у початкове рівняння. Але якщо отримані корені - ірраціональні числа, така перевірка є досить громіздкою. Другий підхід полягає у тому, щоб перейти до системи, рівносильної даному рівнянню. Таку систему можна отримати, якщо доповнити рівняння, в якому записані ліва і права частини, піднесені до квадрата, нерівністю, що забезпечує однаковий знак лівої і правої частин.

Приклад. Розв’язати рівняння: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image891.jpg

Розв’язання. ОДЗ рівняння задається системою http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image892.jpg тобто х ≥ -3.

Ліва і права частини заданого рівняння невід’ємні, тому їх можна підносити до квадрат, але це призводить до громіздких обчислень (перевірте це самостійно). Тому раціональніше один з коренів (наприклад, http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image893.gif) перенести у праву частину. Маємо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image894.jpg Піднесемо ліву і праву частини рівняння до квадрата. Оскільки права частина останнього рівняння може бути як додатною, так і від’ємною, то таке перетворення не є рівносильним, тому отриманий корінь слід перевірити.

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image895.jpg

Перевірка: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image896.jpg Отже, х = 1 - єдиний корінь рівняння.

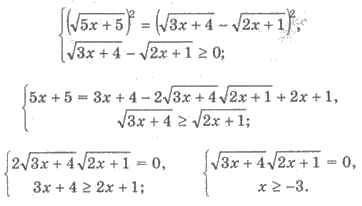
Відповідь. х = 1.

Приклад. Розв’язати рівняння: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image897.jpg

Розв’язання. ОДЗ рівняння задається системою

 з якої дістаємо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image899.jpg

Піднесення невід’ємних лівої і правої частин заданого рівняння призводить до громіздких обчислень. Краще радикал http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image900.gif перенести у праву частину: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image901.jpg Отримане рівняння можна розв’язати тим самим способом, що й попереднє, а можна підійти до розв’язування інакше. Ліва частина отриманого рівняння - невід’ємна, тому невід’ємною має бути і права частина. Отже, рівняння рівносильне системі:



Перше рівняння має корені http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image903.jpg Але лише другий задовольняє як умову х ≥ -3, так і ОДЗ. Оскільки всі перетворення рівняння є рівносильними, то перевірка не є обов’язковою. Отже, х = -1/2 - єдиний корінь рівняння.

Відповідь, х = -1/2.

**5. Заміна змінних у ірраціональному рівнянні.**

Деякі ірраціональні рівняння зручно розв’язувати, використовуючи заміну http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image871.gif= t. При цьому зауважимо, що у випадку парного n нова змінна t має задовольняти умову t ≥ 0.

Приклад. Розв’яжіть рівняння: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image904.jpg

Розв’язання. Зробимо заміну http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image905.gif = t, де £ > 0. Тоді 8/t - t = 2, звідси маємо t1= 2; t2 = -4. Умову t ≥ 0 задовольняє перший корінь.

Отже http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image906.jpg

**§20. ІРРАЦІОНАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ.**

Нерівність називають ірраціональною, якщо вона містить невідомі під знаком кореня.

Розглянемо деякі види ірраціональних нерівностей та методи їх розв’язування.

**1. Найпростіші ірраціональні нерівності.**

До найпростіших ірраціональних нерівностей віднесемо наступні: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image914.jpghttp://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image915.jpg де а - деяке число.

Якщо n - непарне число, то при піднесенні до степеня n лівої та правої частини нерівності, отримаємо нерівність рівносильну даній.

Приклад 1. Розв’яжіть нерівність: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image916.jpg

Розв’язання. 1) Піднесемо до п’ятого степеня обидві частити нерівності. Маємо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image917.jpg

2) Піднесемо до третього степеня обидві частити нерівності. Маємо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image918.jpg

Якщо n - парне число, то при піднесенні до степеня n отримаємо (на ОДЗ даної нерівності) нерівність, рівносильну даній лише за умови а ≥ 0. Отже, при розв’язуванні найпростіших ірраціональних нерівностей при парному n треба звертати увагу на число а (на ОДЗ нерівності).

Приклад 2. Розв’яжіть нерівність:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image919.jpg

Розв’язання. 1) ОДЗ даної нерівності х ≥ 0. На ОДЗ піднесемо до четвертого степеня невід’ємні ліву та праву частини даної нерівності, маємо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image920.jpg х ≥ 16. Всі значення х, які задовольняють умову х ≥ 16, задовольняють і ОДЗ.

2) ОДЗ даної нерівності х ≥ 0, після піднесення до шостого степеня невід’ємні лівої та правої частин даної нерівності, матимемо х < 1. Отже, остаточно розв’язками нерівності є такі числа х, що 0 ≤ х < 1.

3) Оскільки http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image921.gif ≥ 0, для всіх х, що задовольняють ОДЗ нерівності, то розв’язками нерівності http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image921.gif ≥ -1 будуть всі значення х з ОДЗ, тобто х ≥ 0.

4) Оскільки http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image922.gif ≥ 0 для всіх х, що задовольняють ОДЗ нерівності, то нерівність http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image922.gif < -2 не має розв’язків.

Аналогічно розв’язуються нерівності, якщо замість х є деякий вираз f(х).

Приклад 3. Розв’яжіть нерівність http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image923.gif - 1 ≤ 3.

Розв’язання. Дана нерівність рівносильна такій подвійній 0 ≤ х - 1 < З4(нерівність х - 1 ≥ 0 є ОДЗ даної нерівності, а х - 1 ≤ З4 отримали після піднесення початкової нерівності до четвертого степеня). Маємо 0 ≤ х – 1 ≤ 81; 1 ≤ х ≤ 82.

﻿**2. Нерівності виду http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image871.gif > http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image875.gif, http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image871.gif ≥ http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image875.gif.**

Подамо у вигляді таблиць схеми розв’язування нерівностей http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image871.gif > http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image875.gif, http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image871.gif ≥ http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image875.gif, де n ≥ 2 - натуральне число.

|  |  |
| --- | --- |
| http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image871.gif > http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image875.gif, де n ≥ 2 - натуральне число | |
| n - парне | n - непарне |
| http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image924.jpg | f(х) > g(x) |

|  |  |
| --- | --- |
| http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image871.gif ≥ http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image875.gif, де n ≥ 2 - натуральне число | |
| n - парне | n - непарне |
| http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image925.jpg | f(x) ≥ £(Х) |

Приклад. Розв’яжіть нерівності:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image926.jpg

Розв’язання. http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image927.jpg

2) Нерівність рівносильна системі

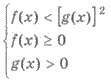
http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image928.jpg

Розв’яжемо її.

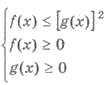
http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image929.jpg

**3. Нерівності виду http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image930.gif < http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image931.gif, http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image930.gif ≤ http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image931.gif.**

Нерівність виду http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image930.gif < http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image931.gif рівносильна системі

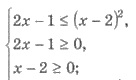
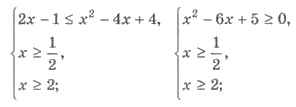


Нерівність виду http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image930.gif ≤ http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image931.gif рівносильна системі

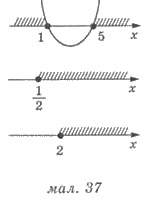


Приклад. Розв’яжіть нерівність: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image934.jpg

Розв’язання. Нерівність рівносильна системі

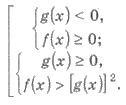
 

Звідси отримаємо х ≥ 5 (графічна ілюстрація на малюнку 37).

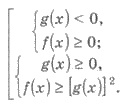


**4. Нерівності виду http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image930.gif > http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image931.gif, http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image930.gif ≥ http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image931.gif.**

Нерівність виду http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image930.gif > http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image931.gif рівносильна сукупності систем

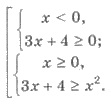


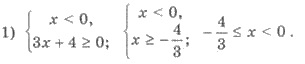
Нерівність виду http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image930.gif ≥ http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image931.gif рівносильна сукупності систем



Приклад. Розв’яжіть нерівність http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image940.jpg

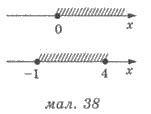
Розв’язання. Нерівність рівносильна сукупності систем





http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image943.jpg

0 ≤ х ≤ 4 (мал. 38).



Об’єднуючи отримані в пункті 1 і 2 результати, отримаємо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image945.jpg

**5. Розв’язування ірраціональних нерівностей, що містять декілька квадратних коренів.**

Нерівність виду http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image946.jpg де а - число, http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image947.jpg та подібні починаємо розв’язувати із знаходження ОДЗнерівності. Після цього застосовуємо прийоми, знайомі нам по розв’язуванню відповідних рівнянь, та прийоми розв’язування простіших нерівностей.

Приклад. Розв’яжіть нерівність http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image948.jpg

Розв’язання.

ОДЗ нерівності визначається системою нерівностей

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image949.jpg

звідси маємо х ≥ 0. Перенесемо радикал http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image950.gif у праву частину нерівності: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image951.jpg Піднесемо до квадрата ліву і праву частини отриманої нерівності. Отже, початкова нерівність рівносильна системі:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image952.jpg розв’яжемо її.

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image953.jpg

**КОНТРОЛЬНИЙ ТЕСТ № 5**