**Розділ IV. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ, ПОЧАТКИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА ЕЛЕМЕНТИ СТАТИСТИКИ**

**§1. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ.**

**1. Правило суми і правило добутку**

Багато комбінаторних задач можуть бути розв’язані за допомогою двох важливих правил, які називають відповідно правило суми і правило добутку.

Спочатку розглянемо правило суми:

якщо деякий елемент А можна вибрати m способами, а елемент В — r способами (причому будь-який вибір елемента А відрізняється від вибору елемента В), то вибрати А або В можна m + r способами.

Приклад 1. В ящику знаходиться 7 білих і 4 чорних кульки. Тоді вибрати одну кульку: білу або чорну можна 7 + 4 = 11 способами.

Зрозуміло, що правило суми можна розповсюдити на три і більше елементів.

Сформулюємо правило добутку:

якщо деякий елемент А можна вибрати m способами, а після кожного такого вибору інший елемент В можна вибрати (незалежно від вибору елемента А) — r способами, то пару об’єктів А і В можна вибрати mr способами.

Приклад 2. У шкільній їдальні є вибір з 3 перших і 5 других блюд. Тоді обід з першого і другого блюда можна обрати 3 ∙ 5 = 15 способами.

Правило добутку розповсюджується на три і більше елементів.

Приклад 3. Скільки трицифрових чисел можна скласти з цифр 1; 2; 3; 4; 5, якщо в числі: 1) цифри не повторюються; 2) цифри повторюються.

Розв’язання.

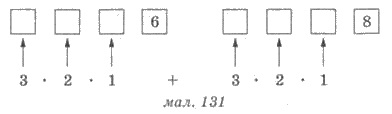
1) Маємо 5 способів для сотень числа (мал. 129). Після того, як місце сотень заповнене (наприклад, цифрою 1), для десятків залишається 4 способи. Міркуючи далі, для одиниць - 3 способи. Отже, маємо: «5 способів, і після кожного з них — 4, і після кожного з них — 3 способи». За правилом добутку маємо 5 ∙ 4 ∙ 3 = 60 чисел.

2) Якщо цифри у числі повторюються, то на кожне з трьох місць є по 5 варіантів заповнення (мал. 130), і тоді всіх чисел буде 5 ∙ 5 ∙ 5 = 125.



Приклад 4. Скільки парних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 6; 7; 8; 9, якщо в числі цифри не повторюються?

Розв’язання. Парне чотирицифрове число можна отримати, якщо останньою цифрою буде 6 або 8. Чисел, у яких остання цифра 6 буде З ∙ 2 ∙ 1 = 6 (мал. 131), чисел, у яких остання цифра 8 буде також 6. За правилом суми всього парних чисел, що задовольняють умові, буде 6 + 6 = 12.



**§1. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ.**

**2. Поняття факторіалу.**

Факторіалом числа n, де n — ціле невід’ємне число називають добуток всіх натуральних чисел від 1 до n.

Позначають це так n! Отже, n! = 1 ∙ 2 ∙ 3 ∙...∙ (n - 1) ∙ n. За означенням приймають 0! = 1. Наприклад, 4! = 1 ∙ 2 ∙ 3 ∙ 4 = 24.

Приклад. Спростити вираз 6!/5!.

Розв’язання. Маємо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1908.jpg

**3. Розміщення.**

Нехай дано множину X з n елементів х1,х2,хn-1,хn.

Розміщенням з n елементів по m (m < n) називають будь-яку впорядковану підмножину У множини X, причому дві такі підмножини вважають різними, якщо вони відрізняються складом або порядком елементів.

Приклад 1. Нехай дано множину Х = {1;2;3}. Тоді по одному можна скласти такі розміщення:

(1), (2), (3) - їх буде 3;

по два можна скласти такі розміщення:

(1;2), (1;3), (2;1), (2;3), (3;1), (3;2) - їх буде 6;

по три можна скласти такі розміщення:

(1;2;3), (1;3;2), (2;1;3), (2;3;1), (3;1;2), (3;2;1) - їх буде 6.

Кількість розміщень з n елементів по m позначають Аmn. Можна записати http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1909.jpg

Формула для обчислення:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1910.jpg

Цю формулу можна запам’ятати за допомогою такого правила:

Аmn є добутком т натуральних чисел, починаючи з n, взятих у порядку спадання.

Наприклад, А47 = 7 ∙ 6 ∙ 5 ∙ 4 = 840.

Аmn можна обчислювати ще й за такою формулою:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1911.jpg

Приклад 2. Розклад на день містить 6 уроків. Визначити кількість всіх можливих розкладів при виборі з 9 предметів, при умові, що жоден предмет не стоїть у розкладі двічі.

Розв’язання. Зрозуміло, що таких розкладів буде

А69 = 9 ∙ 8 ∙ 7 ∙ 6 ∙ 5 ∙ 4 = 60480.

Приклад 3. Скільки різних правильних дробів можна скласти з чисел 1; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19, які використовують для запису чисельника і знаменника дробу?

Розв’язання. Дробів, у яких чисельник не дорівнює знаменнику можна скласти А28 штук, але лише половина з них правильні. Отже, шукана **4. Перестановки.**

Перестановкою з n елементів називають будь-яку впорядковану множину з усіх цих елементів, причому дві такі множини називаються різними, якщо вони відрізняються між собою порядком елементів.

Кількість перестановок з п елементів позначають Рn. З означення випливає, що Рn = Аnn. Тоді враховуючи формулу для Аmn та 0! = 1, маємо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1913.jpg Отже,

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1914.jpg

Приклад 1. Скількома способами можна розставити на полиці 6 книжок?

Розв’язання. Очевидно, що шукана кількість способів дорівнює кількості перестановок з 6 елементів (книг): Р6 = 6! = 1 ∙ 2 ∙ 3 ∙ 4 ∙ 5 ∙ 6 = 720.

Приклад 2. Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 0; 1; 2; 3, якщо в кожному числі жодна з цифр не повторюється?

Розв’язання. З чотирьох цифр 0; 1; 2; 3 можна утворити Р4 перестановок. Але ті перестановки, які починаються з нуля не будуть записами чотирицифрових чисел, таких перестановок — Р3. Отже, шукана кількість чотирицифрових чисел дорівнює Р4 - Р3 = 4! - 3! = 3!(4 - 1) = 6 ∙ 3 = 18.

кількість дробів http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1912.jpg

**5. Комбінації (сполучення).**

Нехай дано множину X з елементів x1, x2,..., xп-1, xn.

Комбінацією (сполученням) з n елементів по m (m ≤ n) називають будь-яку під множину Y множини X; причому дві такі підмножини вважають різними, якщо вони відрізняються складом.

Кількість комбінацій з n елементів по m позначають Сmn. Для обчислення Сmn використовують формулу:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1915.jpg

Наприклад, http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1916.jpg

Приклад. У вазі 6 червоних і 4 білих троянди. Скількома способами з вази можна вибрати: 1) три троянди; 2) дві червоні і одну білу троянду?

Розв’язання. 1) Оскільки порядок вибору не має значення, то вибрати три троянди з 10 можна С310 способами.

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1917.jpg

2) Дві червоні троянди можна вибрати С26 способами, а одну білу – C14 способами. Тому вибрати дві червоні і одну білу троянди можнаспособами. Маємо

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1918.jpg

Якщо в комбінаторній задачі необхідно вибрати т елементів з n, то важливим є питання необхідно враховувати порядок слідування елементів чи ні. Від цього залежить яку формулу (комбінаторну схему) необхідно використовувати:

якщо порядок має значення, то використовуємо Аmn, якщо ні — то Сmn. Пропонується наступна задача-схема.

|  |  |
| --- | --- |
| В класі 20 учнів. Скількома способами з цього класу можна вибрати... | |
| старосту й його заступника | двох чергових |
| Обов’язки різні!  Порядок має значення.  http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1919.jpg | Обов’язки однакові!  Порядок не має значення.  http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1920.jpg |

**§2. ЙМОВІРНІСТЬ ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ.**

**2. Вірогідна подія та неможлива подія.**

Подію, яка при даних умовах обов’язково відбудеться називають вірогідною подією.

Приклад вірогідної події: «випадання натурального числа, меншого за 7 при підкиданні грального кубика». Вірогідну подію прийнято позначати буквою U.

Подію, яка при даних умовах не може відбутися називають неможливою подією.

Приклад неможливої події: «випадання натурального числа, більшого за 6 при підкиданні грального кубика». Неможливу подію прийнято позначати буквою V.

﻿**3. Класичне означення ймовірності випадкової події.**

Випадок, в результаті якого відбувається подія А, називають випадком, що сприяє появі події А.

Класичне означення ймовірності випадкової події полягає у наступному:

ймовірність випадкової події А дорівнює відношенню кількості випадків m, що сприяють появі події А до кількості всіх можливих випадків n:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1921.jpg

Зауважимо, що ймовірність вірогідної події р(U)= 1, а ймовірність неможливої події р(V) = 0.

Розглянемо приклади.

Приклад 1. В урні 4 білих і 12 чорних кульок. Навмання виймаємо одну з них. Яка ймовірність того, що вона біла (подія А)?

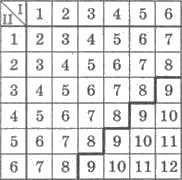
Розв’язання. З урни можна витягти з рівною ймовірністю будь-яку з 4 + 12 = 16 кульок. Тому n = 16. Число випадків, що сприяють появі події А, дорівнює 4, тобто m = 4. Отже, p(a) = 4/16 = 0,25.

Приклад 2. На картках написані натуральні числа від 1 до 18. Навмання витягують одну з карток. Яка ймовірність того, що число, записане на картці, є дільником числа 18 (подія А)?

Розв’язання. Зрозуміло, що n = 18. Натуральними дільниками числа 18 є числа 1; 2; 3; 6; 9; 18. Отже, m = 6. Тоді р(А) = 6/18 = 1/3.

Приклад 3. Одночасно підкинули два гральні кубики. Яка ймовірність того, що сума очок, які випали на кубиках: 1) дорівнює 7; 2) більша за 8?

Розв’язання. Складемо таблицю суми очок, що може випасти на двох гральних кубиках при їх одночасному підкиданні, n = 36 — кількість усіх можливих випадків.



1) Є 6 випадків, коли сума очок на кубиках дорівнює 7. Отже, m = 6. Тоді http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1923.jpg

2) Є 10 випадків, коли сума очок на кубиках більша за 8. Тому, http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1924.jpg

**4. Розв’язування задач на підрахунок ймовірностей за допомогою формул комбінаторики.**

Часто в задачах на підрахунок ймовірностей використовують формули комбінаторики. Розглянемо приклади.

Приклад 1. На картках записані натуральні числа: від 1 до 15. Навмання вибирають дві з них. Яка ймовірність того, що сума чисел, записаних на цих картках дорівнює 10?

Розв’язання. Кількість всіх можливих випадків — це кількість способів, якими можна (без врахування порядку) вибрати дві картки з п’ятнадцяти. Отже, n = С215 = 105. Нас влаштовують такі набори (1;9), (2;8), (3;7), (4;6). Отже, http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1925.jpg

Приклад 2. В ящику 7 білих і 3 чорні кульки. Навмання вибирають три з них. Яка ймовірність того, що 1) всі вони білі; 2) дві з них — білі, а одна — чорна?

Розв’язання. Для обох задач n = С310= 120 — кількість всіх можливих випадків.

1)  Вибрати три білі кульки можна С37 способами. Отже m = С37 = 35; http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1926.jpg

2) Вибрати дві білі кульки можна С27 способами і після кожного такого вибору вибрати чорну кульку можна С13 способами. За правилом добутку http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1927.jpg

**§3. ЕЛЕМЕНТИ СТАТИСТИКИ.**

Математична статистика — розділ математики, в якому вивчають методи збору, систематизації, обробки та дослідження статистичних даних для наукових і практичних висновків.

**1. Генеральна сукупність та вибірка.**

Генеральна сукупність — сукупність всіх об’єктів, що підлягають дослідженню. Обсяг генеральної сукупності, тобто число об’єктів дослідження може бути досить великим, а інколи і нескінченним. Часто буває неможливо дослідити всі об’єкти генеральної сукупності.

У подібних випадках найкращим способом дослідження є вибірковий метод: з генеральної сукупності вибирають її деяку частину — вибірку та досліджують її.

Вибіркою називають сукупність об’єктів, вибраних випадковим чином з генеральної сукупності. Метод математичного дослідження, який полягає у тому, що на основі дослідження вибірки роблять висновок про всю генеральну сукупність називають вибірковим методом.

﻿**2. Систематизація і ранжування вибірки.**

Важливим етапом дослідження є систематизація отриманих даних (вибірки), тобто подання вибірки у зручному для подальших дій вигляді.

Приклад 1. Всі одинадцятикласники деякого району писали одну й ту гаму перевірочну контрольну роботу з математики за текстами районного управління освіти. Вибірку склали 30 навмання обраних робіт цих одинадцятикласників. Нехай вибрані одинадцятикласники дістали наступні оцінки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 4 | 3 | 10 | 6 | 2 | 8 | 7 | 5 | 9 | 11 |
| 7 | 12 | 1 | 8 | 4 | 9 | 6 | 7 | 10 | 5 |
| 9 | 6 | 8 | 3 | 11 | 7 | 2 | 8 | 4 | 10 |

Дані цієї вибірки можна систематизувати у таблицю за кількістю набраних балів.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Отриманий бал за контрольну роботу | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Кількість учнів | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 1 |

Також дані вибірки можна систематизувати за рівнями навчальних досягнень.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Рівень навчальних досягнень | Початковий рівень | Середній рівень | Достатній рівень | Високий рівень |
| Кількість учнів | 5 | 8 | 11 | 6 |

Операцію розташування випадкових величин вибірки за принципом неспадання називають ранжуванням вибірки. При ранжуванні вибірки кожне наступне число вибірки не менше за попереднє.

Приклад 2. В результаті ранжування вибірки, розглянутої в прикладі 1 цього пункту, матимемо 1; 2; 2; 3; 3; 4; 4; 4; 5; 5; 6; 6; 6; 7; 7; 7; 7; 8; 8; 8; 8; 9; 9; 9; 10; 10; 10; 11; 11; 12.

**3. Вибіркові характеристики.**

При статистичних дослідженнях вибірки важливим етапом є оцінювання її числових характеристик, які називають вибірковими характеристиками.

Розмах вибірки R — це різниця між найбільшим і найменшим значенням випадкової величини у вибірці.

Для вибірки, розглянутої в прикладі 1 попереднього пункту, маємо R = 12 - 1 = 11.

Мода вибірки МO — те значення випадкової величини, що зустрічається у вибірці найчастіше.

Для вибірки, розглянутої в прикладі 1 попереднього пункту є дві моди — це числа 7 і 8. Можна записати МO1 = 7; МO2 = 8.

Медіана вибірки Ме — серединне значення ранжованої вибірки.

Медіана ділить ранжовану вибірку на дві рівні за кількістю частини. Якщо у вибірці непарна кількість випадкових величин, то його медіаною є число, яке стоїть посередині.

Наприклад, у ранжованій вибірці:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1928.jpg

що складається з 7 випадкових величин, медіаною є число 3. Можна записати Ме = 3.

Якщо у вибірці парне число випадкових величин, то медіана — середнє арифметичне двох чисел, що стоять посередині.

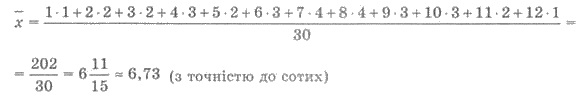
Наприклад, у ранжованій вибірці:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1929.jpg

що складається з 8 випадкових величин, медіана — це середнє арифметичне чисел 4 і 5, що стоять посередині ряду. Отже, Ме = (4 + 5)/2.

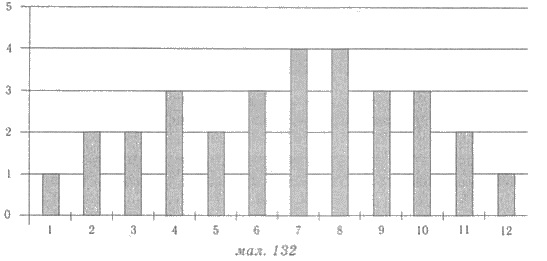
Середнє арифметичне вибірки http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1930.gif — це середнє арифметичне всіх її значень x1; x2; x3;…; xn.

Так, наприклад, середнє арифметичне вибірки, розглянутою у прикладі 1 попереднього пункту знаходиться наступним чином:



**4. Графічна форма подання статистичної інформації.**

Статистичну інформацію можна подавати у вигляді гістограм. На малюнку 132 подано гістограму розподілу кількості учнів в залежності від отриманого балу, побудовану за відповідною таблицею прикладу 1, пункту 3 цього параграфа.



Також зручно подавати статистичну інформацію у вигляді кругових діаграм, у яких градусна величина сектора будується пропорційно до зображуваної величини. На малюнку 133 подано кругову діаграму розподілу кількості учнів в залежності від рівня навчальних досягнень, побудовану за відповідною таблицею прикладу 1, пункту 3 цього параграфа.

