**Розділ II. РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ**

**§8. КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН**

**1. Означення квадратного тричлена.**

Квадратним тричленом називають многочлен виду ах2 + bх + с, де х - змінна, а, b, с — числа, причому а ≠ 0.

Дискримінантом квадратного тричлена називають вираз D = b2 - 4ас. Дискримінант квадратного тричлена співпадає з дискримінантом відповідного квадратного рівняння

ах2 + bх + с = 0.

Коренем квадратного тричлена називають значення змінної, при якому значення цього тричлена дорівнює нулю. Корені квадратного тричлена співпадають з коренями відповідного квадратного рівняння. Якщо D > 0, то квадратний тричлен має два різних корені; якщо D = 0, то квадратний тричлен має один корінь (два рівних корені), якщо D < 0, то квадратний тричлен не має коренів.

**2. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.**

Якщо х1 і х2 - корені квадратного тричлена ах2 + bх + с, то ах2 + bх + с = а(х – x1)(x - x2).

Приклад 1. Розкласти на множники квадратний тричлен: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image749.jpg

Розв’язання. 1) Коренями рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image750.jpg є числа x1 = -2,5; х2 = 1. Тому http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image751.jpg Знайдений результат можназаписати інакше, помноживши на -2 двочлен

х + 2,5. Маємо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image752.jpg

2) квадратне рівняння 2х2 - 12х + 18 = 0 має два рівних корені х1 = х2 = 3. Тому http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image753.jpg

3) Квадратне рівняння х2 – 2x + 7 = 0 не має коренів. Тому квадратний тричлен х2 - 2х + 7 не можна розкласти на лінійні множники на множині дійсних чисел.

Приклад 2. Скоротити дріб http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image754.jpg

Розв’язання. Розкладемо на множники квадратний тричлен 2х2 - 2х - 4. Коренями рівняння 2х2 - 2х - 4 = 0 є числа 2 і -1. Тому http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image755.jpg Отже,

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image756.jpg

**§9. РОЗВ’ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ДРУГОГО СТЕПЕНЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ.**

**1. Спосіб підстановки.**

Якщо в системі рівнянь з двома змінними одне з рівнянь є лінійним рівнянням з двома змінними, то таку систему рівнянь можна розв’язувати способом підстановки.

Приклад. Розв’язати систему рівнянь http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image757.jpg

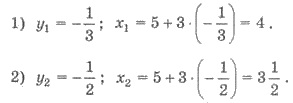
Розв’язання. Виразимо з другого рівняння змінну х через у. Маємо: х = 5 + 3у.

Підставляємо в перше рівняння системи замість х вираз 5 + 3у та отримаємо рівняння із змінною у.

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image758.jpg

Розв’язавши його, маємо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image759.jpg

Далі,



Отже, розв’язками системи є пари чисел http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image761.jpg

**2. Спосіб додавання.**

Так само, як і для систем двох лінійних рівнянь з двома змінними, спосіб додавання доцільно використовувати, якщо в результаті додавання рівнянь системи отримаємо рівняння з однією змінною.

Приклад 1. Розв’яжіть систему рівнянь http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image762.jpg

Розв’язання. Складемо почленно два рівняння системи. Отримаємо 2x = 10, х = 5. Підставивши це значення, наприклад, у перше рівняння дістанемо 5 – 5y = 20; 5y = 15; у = -3. Отже розв’язком системи є пара (5; -3).

Приклад 2. Розв’яжіть систему рівнянь http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image763.jpg

Розв’язання. Помножимо друге рівняння системи на -2. Маємо

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image764.jpg

Складемо почленно рівняння системи: х2 — 2х = 3, звідси х2 - 2х – 3 = 0; x1 = -1; х2 = 3. Розглянемо ці випадки.

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image765.jpg

Отже, розв’язками системи є пари чисел (-1; 10) і (3; -2).

Також спосіб додавання доцільно використовувати в тому випадку, коли в результаті додавання рівнянь системи отримаємо лінійне рівняння з двома змінними.

Приклад 3. Розв’яжіть систему рівнянь http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image766.jpg

Розв’язання. Помножимо перше рівняння системи на -2. Маємо

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image767.jpg

Складемо почленно рівняння системи у - 2х = 1. Звідси виразимо у через х: у = 1 + 2х. Підставимо у перше рівняння заданої системи замість у вираз 1 + 2х.

Маємо: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image768.jpg

Далі,

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image769.jpg

Отже, розв’язками системи є пари чисел (1; 3), (-2; -3).

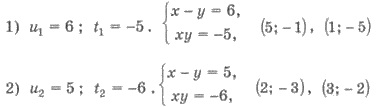
**3. Заміна змінних.**

Деякі системи рівнянь другого степеня (а також системи, в які входять рівняння степеня більше другого) зручно розв’язувати, використовуючи заміну змінних.

Приклад. Розв’яжіть систему рівнянь http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image770.jpg

Розв’язання. Зробимо заміну х - у = u; ху = t. Маємо систему рівнянь http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image771.jpg

Розв’язуючи цю систему способом підстановки, дістанемо u1 = 6; t1 = -5 або u2 = 5; t2 = -6.



Отже початкова система має чотири пари розв’язків: (5;-1); (1;-5); (2;-3); (3;-2).

**§10. ЗАСТОСУВАННЯ РІВНЯНЬ ДО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ.**

**1. Загальна схема.**

Розв’язувати текстову задачу за допомогою рівняння можна за допомогою такої схеми:

1) вибираємо деяку невідому величину і позначаємо її буквою (наприклад, х);

2) інші невідомі величини (якщо вони є) виражають через введену букву;

3) за умовою задачі встановлюємо відношення між невідомими та відомими значеннями величин і складаємо рівняння;

4) розв’язуємо складене рівняння;

5) знаходимо значення невідомого, а якщо треба за умовою задачі, то й значення інших невідомих величин;

6) відповідаємо на запитання задачі.

**2. Розв’язування текстових задач за допомогою лінійних рівнянь.**

Приклад. На одній садовій ділянці в 3 рази більше кущів малини, ніж на другій. Коли з першої ділянки пересадили на другу 8 кущів, то на обох ділянках кущів малини стало порівну. Скільки кущів малини було на кожній ділянці спочатку?

Розв’язання. Нехай на другій ділянці спочатку було х кущів малини, тоді на першій - Зх кущів. Після того, як з першої ділянки на другу пересадили 8 кущів, на першій ділянці кущів стало Зх - 8, а на другій - х + 8. За умовою задачі: Зх - 8 = х + 8.

Розв’яжемо це рівняння: 2х = 16; х = 8.

Отже, спочатку на другій ділянці було 8 кущів малини, а на першій 3 ∙ 8 = 24 куща малини.

﻿**3. Розв’язання текстових задач за допомогою квадратних рівнянь.**

Приклад. У кінотеатрі кількість місць у ряді на 5 більша за кількість рядів. Скільки рядів у кінотеатрі, якщо всього в ньому 414 місць?

Розв’язання. Нехай у кінотеатрі х рядів, тоді місць у кожному ряді - (х + 5). Всього місць у залі х (х + 5). За умовою: х(х + 5)= 414.

Розв’язуючи це рівняння, дістанемо:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image773.jpg

За змістом задачі х - додатне число. Цю умову задовольняє лише перший корінь. Отже, у кінотеатрі 18 рядів.

**4. Задачі на рух, що зводяться до дробових раціональних рівнянь.**

Приклад 1. З одного міста до іншого, відстань між якими 420 км, виїхали одночасно автомобіль і мотоцикл. Швидкість автомобіля на 10 км/год більша за швидкість мотоцикла, тому він приїхав у пункт призначення на 1 год раніше. Знайдіть швидкість мотоцикла і швидкість автомобіля.

Розв’язання. Позначимо швидкість мотоцикла х км/год і систематизуємо дані у вигляді таблиці.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Вид транспорту | S, км | υ, км/год | t, год |
| Мотоцикл | 420 | x | 420/x |
| Автомобіль | 420 | х + 10 | 420/(х +10) |

Оскільки величина 420/(х +10) год. на 1 год. менша за величину 420/x год., то маємо рівняння:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image774.jpg

Розв’язавши його, дістанемо х1 = 60; х2 = -70. Другий корінь не задовольняє умови задачі. Отже, швидкість мотоцикла 60 км/год., а автомобіля - 60 + 10 = 70 (км/год.).

Приклад 2. Човен, власна швидкість якого 18 км/год., пройшов 40 км за течією і 16 км проти течії річки, витративши на весь шлях 3 год. Яка швидкість течії, якщо відомо, що вона менша за 4 км/год.?

Розв’язання. Позначимо швидкість течії х км/год. і систематизуємо дані у вигляді таблиці.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Вид руху | S, км | υ, км/год | t, год |
| За течією | 40 | 18 + х | 40/(18 + х) |
| Проти течії | 16 | 18 - х | 16/(18 – х) |

Маємо рівняння за умовою задачі

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image775.jpg

Розв’язавши його, дістанемо х1 = 2; х2 = 6. Оскільки за умовою задачі х < 4, то другий корінь не задовольняє умову. Отже, швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

**5. Задачі на роботу, що зводяться до дробових раціональних рівнянь.**

Приклад 1. Дві бригади повинні виготовити по 100 деталей, причому перша виготовляє за годину на 5 деталей більше, ніж друга. Тому друга бригада виконала замовлення на 1 год. пізніше, ніж перша. Скільки деталей щогодини виготовляє кожна бригада?

Розв’язання. Нехай друга бригада щогодини виготовляла x деталей. Систематизуємо дані до таблиці.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Бригада | Замовлення, дет. | Продуктивність праці, дет./год. | Час роботи, t |
| І | 100 | х + 5 | 100/(х + 5) |
| II | 100 | x | 100/X |

Оскільки величина 100/(х + 5) год. на 1 год. менша за величину 100/x год., то маємо рівняння

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image776.jpg

Розв’язавши його дістанемо х1 = 20; х2 = -25. Другий корінь не задовольняє умову задачі. Отже, друга бригада щогодини виготовляла 20 деталей, а перша - 20 + 5 = 25 деталей.

Приклад 2. Майстер і учень, працюючи разом, можуть виконати певну роботу за 8 год. За скільки годин виконає це замовлення кожен з них, працюючи окремо, якщо майстру на це потрібно на 12 год. менше, ніж учню?

Розв’язання. Нехай майстру, щоб виконати роботу, працюючи окремо, потрібно х год., тоді учневі - (х +12) год. За 1 год. майстер виконає 1/xчастину роботи, а учень – 1/(x + 12) частину роботи. Разом за одну годину вони виконують http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image777.gif частину роботи. За умовою задачі майстер і учень, працюючи разом, можуть виконати роботу за 8 год., тому за 1 год. вони виконують 1/8 частину роботи. Отже, маємо рівняння за умовою задачі: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image778.jpg

Розв’язавши його дістанемо, х1 = 12; х2 = -8. Другий корінь не задовольняє умови задачі. Отже, майстер, працюючи окремо, може виконати роботу за 12 год., а учень - за

12 + 12 = 24 (год.).

**§11. ЗАСТОСУВАННЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ДО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ТЕКСТОВИХ ЗАДАЧ.**

**1. Загальна схема.**

Розв’язуючи текстову задачу за допомогою системи рівнянь можна за допомогою такої схеми:

1) позначаємо якісь дві невідомі величини буквами (наприклад, х і у);

2) за умовою задачі складаємо систему рівнянь;

3) розв’язуємо утворену систему;

4) отримані значення невідомих витлумачуємо відповідно до умови задачі;

5) дістаємо відповідь.

**2. Розв’язування текстових задач за допомогою системи лінійних рівнянь.**

Приклад. За 3 год. за течією і 1 год. проти течії річки моторний човен проходить 64 км. За 1 год. за течією річки і 2 год. в озері цей самий човен проходить 4.7 км. Знайдіть власну швидкість човна і швидкість течії.

Розв’язання. Нехай власна швидкість човна х км/год., а швидкість течії - у км/год. Тоді швидкість човна за течією річки дорівнює (х + у) км/год., а швидкість човна проти течії — (х - у) км/год. За 3 години за течією човен проходить 3(х + у) км, а за 1 год. проти течії (х - у)км. За умовою задачі:

З(х + у) + (х - у) = 64.

Міркуючи аналогічно, за умовою задачі можна скласти друге рівняння:

(х + у) + 2х = 47.

Дістали систему рівнянь:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image779.jpg

Розв’язавши систему, дістанемо: х = 15, у = 2.

Отже, власна швидкість човна дорівнює 15 км/год., а швидкість течії 2 км/год.

﻿**3. Розв’язування текстових задач за допомогою систем другого степеня.**

Приклад. Знайдіть двоцифрове число, яке в 4 рази більше за суму своїх цифр і в 3 рази більше за добуток своїх цифр.

Розв’язання. Нехай у шуканому числі х десятків і у одиниць. Тоді це число дорівнює 10х + у. За умовою задачі 10х + у = 4(х + у) і 10х + у = 3ху.

Маємо систему

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image780.jpg

З першого рівняння системи маємо у = 2х. Підставимо у друге рівняння замість у вираз 2х. Отримаємо 10х + 2х = Зх ∙ 2х; 6х2 - 12х = 0; 6х(х - 2) = 0. Оскільки х - натуральне число, 1 ≤ х ≤ 9, то х = 2. Тоді у = 4. Шукане число - 24.

﻿**КОНТРОЛЬНИЙ ТЕСТ № З**