**Розділ III. ФУНКЦІЯ**

**§8. ПЕРІОДИЧНІСТЬ ФУНКЦІЇ.**

**1. Означення періодичної функції.**

Функцію у = f(х) називають періодичною з періодом Т ≠ 0, якщо для будь-якого х з області визначення функції числа х + Т і х - Т також належить області визначення і виконується рівність f(х + Т) = f(х) = f(x - Т).

При дослідженні функцій і побудови графіків важливим є знаходження найменшого додатного періоду.

**2. Найменший додатній період тригонометричних функцій.**

Серед функцій, які розглядаються у школі, періодичними є тригонометричні функції та функція у = b, де b - деяке число.

Найменший додатний період функції у = sin x і у = cos x дорівнює 2π, а функцій у = tg х і у = ctg х дорівнює π.

Також можна знайти найменший додатній період функції у = f(ax + b), де f - одна з тригонометричних функцій.

Найменший додатній період функцій у = sіn(kх + b) і у = соs(kх + b) дорівнює 2π/|k|, а функції у = tg(kx + b) і у = сtg(kх + b) дорівнює π/|k|.

Приклад. Знайдіть найменший додатній період функції



Розв’язання.



**§9. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ, ЇХ ГРАФІКИ ТА ВЛАСТИВОСТІ.**

**1. Функція у = sin x, її графік.**

Складемо таблицю значень функції у = sin х на проміжку [0; π]:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | π/6 | π/4 | π/3 | π/2 | 2π/3 | 3π/4 | 5π/6 | π |
| y | 0 | 1/2 | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image234.gif/2 | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif/2 | 1 | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif/2 | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image234.gif/2 | 1/2 | 0 |

Далі, для побудови графіка врахуємо тотожність sin(-х) = -sin(x), та найменший додатній період функції у = sin х, що дорівнює 2π. Графік функції у = sin x зображено на малюнку 81.



Криву, яка є графіком функції у = sin x, називають синусоїдною.

**2. Функція у = cos x, її графік.**

Для побудови функції у = cos х, спочатку складемо таблицю значень на проміжку [0;π]:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | π/6 | π/4 | π/3 | π/2 | 2π/3 | 3π/4 | 5π/6 | π |
| y | 1 | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif/2 | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image234.gif/2 | 1/2 | 0 | -1/2 | -http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image234.gif/2 | -http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif/2 | -1 |

Враховуючи тотожність cos(-х) = cos х, та найменший додатній період функції у = cos х, що дорівнює 2π. Графік функції у = cos x зображено на малюнку 82.



Графіком функції у = cos х є також синусоїда (коли графік функції у = cos х називають ще косинусоїдою).

﻿**§9. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ, ЇХ ГРАФІКИ ТА ВЛАСТИВОСТІ.**

**3. Функція у = tg x, її графік.**

Функція у = tg х не визначена для чисел виду π/2 + πk, k  Z. Складемо таблицю значень для функції у = tg х на проміжку (-π/2; π/2).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -π/2 | -π/3 | -π/4 | -π/6 | 0 | π/6 | π/4 | π/3 | π/2 |
| y | - | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif | -1 | -1/http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif | 0 | 1/http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif | 1 | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif | - |

Враховуємо найменший додатній період функції у = tg х, що дорівнює π. Графік функції у = tg x зображено на малюнку 83.



Графік функції у = tg х називають тангенсоїдою, він складається з безлічі окремих віток тангенсоїди.

**4. Функція у = ctg x, її графік.**

Функція у = ctg х не визначена для чисел виду πk, k  Z. Складемо таблицю значень для функції у = ctg х на проміжку (0;π).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | π/6 | π/4 | π/3 | π/2 | 2π/3 | 3π/4 | 5π/6 | π |
| y | - | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif | 1 | 1/http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif | 0 | -1/http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif | -1 | -http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image176.gif | - |

Враховуючи найменший додатній перехід функції у = ctg х, що дорівнює π. Графік функції у = ctg х зображений на малюнку 84.



Графіком функції у = ctg х також є тангенсоїда. Графіком функції у = ctg x також називають котангенсоїдою.

**9. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ, ЇХ ГРАФІКИ ТА ВЛАСТИВОСТІ.**

**5. Властивості тригонометричних функцій.**

Подамо властивості тригонометричних функцій у вигляді таблиці (скрізь вважаємо k  Z).

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Властивість | у = sіn x | у = cos x | у = tg x | y = ctg х |
| 1 | Областьвизначення | (-∞;+∞) | (-∞;+∞) | х ≠ π/2 + πk | х ≠ πk |
| 2 | Область значень | [-1;1] | [-1;1] | (-∞;+∞) | (-∞;+∞) |
| 3 | Парність,непарність | непарна | парна | непарна | непарна |
| 4 | Найменшийдодатнийперіод | 2π | 2π | π | π |
| 5 | Нулі функції | πk | π/2 + πk | πk | π/2 + πk |
| 6 | y > 0 | 2πk < х < π + 2πk | -π/2 + 2πk < х < π/2 + 2πk | πk < х < π/2 + 2πk | πk < х < π/2 + 2πk |
| 7 | y < 0 | -π + 2πk < х < 2πk | π/2 + 2πk < х < 3π/2 + 2πk | -π/2 + πk < х < πk | -π/2 + πk < х < πk |
| 8 | Зростає на проміжках | [-π/2 + 2πk; π/2 + 2πk] | [-π + 2πk; 2πk] | (-π/2 + 2πk; π/2 + 2πk) | - |
| 9 | Спадає на проміжках | [-π/2 + 2πk; 3π/2 + 2πk] | [2πk; π + 2πk] | - | (πk; π + πk) |
| 10 | Найбільшезначенняфункції | 1 при х = π/2 + 2πk | 1 при х = 2πk | - | - |
| 11 | Найменшезначенняфункції | -1 при x =------------- π/2 +2πk  | -1 при х = π + 2πk | - | - |

**§10. ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ГРАФІК І ВЛАСТИВОСТІ.**

**1. Означення показникової функції.**

Функцію, задану формулою у = ах (де а > 0, а ≠ 1) називають показниковою функцією.

Приклади показникових функцій:

 тощо.

**2. Графік показникової функції.**

Розглянемо функцію у = 2х. Складемо таблицю значень функції для кількох цілих значень аргументу.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 1/8 | 1/4 | 1/2 | 1 | 2 | 4 | 8 |

Зауважимо, що 2х > 0 для всіх значень х, тому графік функції у = 2х не перетинає вісь абсцис. Графік функції у = 2х зображено на малюнку 85. При всіх значеннях а > 1 графік функції у = ах схожий на графік функції у = 2х.



Розглянемо функцію у = (1/2)x. Складемо таблицю значень для кількох цілих значень аргументу.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 8 | 4 | 2 | 1 | 1/2 | 1/4 | 1/8 |

Оскільки (1/2)x > 0 для всіх значень х, то графік функції у = (1/2)x не перетинає вісь абсцис. Графік функції зображено на малюнку 86. При всіх значеннях 0 < а < 1 графік функції у = ах схожий на графік функції у = (1/2)x.



**3. Властивості показникової функції.**

Подамо властивості показникової функції у вигляді таблиці.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Властивості | у = ах |
| 0 < а < 1 | а > 1 |
| 1 | Область визначення | х http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image013.gif R | х http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image013.gif R |
| 2 | Область значень | (0;+∞) | (0;+∞) |
| 3 | Парність, непарність | ні парна, ні непарна | ні парна, ні непарна |
| 4 | Періодичність | неперіодична | періодична |
| 5 | Нулі функції | - | — |
| 6 | y > о | при х http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image013.gif (-∞;+∞) | при х http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image013.gif (-∞;+∞) |
| 7 | у < 0 | - | - |
| 8 | Зростає на проміжку | - | (-∞;+∞) |
| 9 | Спадає на проміжку | (-∞;+∞) | - |
| 10 | Найбільше значення | - | — |
| 11 | Найменше значення | - | — |

**§11. ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ГРАФІК ТА ВЛАСТИВОСТІ.**

**1. Означення логарифмічної функції.**

Функцію, яка задана формулою у = loga х, де а > 0, а ≠ 1, називають логарифмічною функцією.

Приклади логарифмічної функції:

 тощо.

Оскільки вираз loga х (де а > 0, а ≠ 1) має зміст лише для додатних значень х, то областю визначення функції у = loga х є проміжок (0

**2. Графік логарифмічної функції.**

Розглянемо функцію у = log2 х. Складемо таблицю значень функції для кількох значень аргументу х > 0.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 1/8 | 1/4 | 1/2 | 1 | 2 | 4 | 8 |
| y | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |

Оскільки х > 0, то графік не перетинає вісь ординат. Графік функції у = loga х зображено на малюнку 87.



При всіх значеннях а > 1 графік функції у = loga х схожий на графік функції у = log2 х.

Розглянемо функцію у = log1/2 х. Складемо таблицю значень для аргументу х > 0.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 1/8 | 1/4 | 1/2 | 1 | 2 | 4 | 8 |
| y | 3 | 2 | 1 | 0 | -1 | -2 | -3 |

Зауважимо, що графік функції у = log1/2 х також не перетинає вісь ординат. Графік функції у = log1/2 х зображено на малюнку 88.



При всіх значеннях 0 < а < 1 графік функції у = loga х схожий на графік функції у = log1/2 х.

Зауважимо, що функції у = ах і y = loga х, що мають одну й ту ж саму основу, є оберненими одна до одної.

**§11. ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ГРАФІК ТА ВЛАСТИВОСТІ.**

**3. Властивості логарифмічної функції.**

Подамо властивості логарифмічної функції у вигляді таблиці.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Властивості | y = loga х |
| 0 < a < 1 | а > 1 |
| 1 | Область визначення | (0;+∞) | (0;+∞) |
| 2 | Область значень | R | R |
| 3 | Парність, непарність | ні парна, ні непарна | ні парна, ні непарна |
| 4 | Періодичність | неперіодична | періодична |
| 5 | Нулі функції | х = 1 | х = 1 |
| 6 | У > 0 | 0 < х < 1 | x > 1 |
| 7 | У < 0 | х > 1 | 0 < х < 1 |
| 8 | Зростає на проміжку | - | (0;+∞) |
| 9 | Спадає на проміжку | (0;+∞) | - |
| 10 | Найбільше значення | - | - |
| 11 | Найменше значення | - | - |

﻿**§12. ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ВІДОМИХ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ**

Якщо відомий графік функцій у = f(x), то за допомогою геометричних перетворень можна побудувати графіки деяких інших функцій.

**1. f(x) → f(x) + n.**

Щоб дістати графік функції y = f(x) + n, треба графік функції у = f(x) перенести на п одиниць вгору вздовж осі у, якщо n > 0, і на |n| одиниць вниз, якщо n < 0.

Зауваження. Замість того, щоб переносити графік функцій вгору або вниз, можна перенести вісь х на стільки ж одиниць у протилежний бік.

Приклад. Побудувати графік функцій 

Розв’язання. Графіки функції у =  та  подано на малюнку 89.



**§12. ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ВІДОМИХ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ**

**2. f(x) → f(x + m).**

Щоб дістати графік функції у = f(х + m), треба графік функції у = f(х) перенести вздовж осі х на т одиниць вліво, якщо m > 0, і на lml одиниць вправо, якщо m < 0.

Зауваження. Замість того, щоб переносити графік функції вліво або вправо, можна перенести вісь у на стільки ж одиниць у протилежний бік.

Приклад. Побудувати графік функцій 

Розв’язання. Графіки функцій у = х2 та функцій у = (х - З)2 і у = (х + 2)2 подано на малюнку 90.



**§12. ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ВІДОМИХ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ**

**3. f(x) → -f(x).**

Графіки функцій у = f(x) і у = -f(x) симетричні відносно осі х.

Приклад. Подувати графік функцій у = -.

Розв’язання. Графіки функцій у =  і у = -у подано на малюнку 91.



**12. ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ВІДОМИХ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ**

**4. f(x) → kf(x), де k > 0, k ≠ 1.**

Щоб дістати графік функції у = kf(x), де k > 0, к ≠ 1, треб графіки функції у = f(x) розтягнути від осі х у k разів, якщо к > 1, і стиснути його до осі х у 1/k разів, якщо 0 < k < 1.

Приклад. Побудувати графік функцій 

Розв’язання. 

Графік функції у = lxl подано на малюнку 92. На малюнку 93 зображено графіки функцій 



**5. Використання декількох перетворень послідовно для побудови графіка функцій.**

Виконуючи послідовно два і більше перетворень, можна будувати графіки функцій виду  і деяких інших.

Приклад 1. Побудувати графік функцій у = lх – 3l + 2.

Розв’язання. Графік функцій у = lх - 3| + 2 можна дістати із графіка функцій у = |х|, якщо останній перенести на 3 одиниці вправо вздовж осі х, після чого вздовж осі у — на 2 одиниці вгору (мал. 94).



Приклад 2. Побудувати графік функцій у = -3.

Розв’язання. Побудуємо графік функцій у = , після чого розтягнемо його утричі від осі х та дістанемо графік у = 3 (мал. 95). Графік функції у = -3 симетричний графіку функцій у = 3 відносно осі х (мал. 95).