**§13. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ.**

**1. Означення числової послідовності. Члени числової послідовності.**

Числова послідовність — це послідовність, членами якої є числа. Числа, які утворюють послідовність називають відповідно першим, другим, третім і т.д. членами послідовності. Члени послідовності прийнято позначати буквами з індексам, що відповідають порядковому номеру кожного члена.

Наприклад: с1, с2, с3, с4.

Розглянемо числову послідовність квадрантів натуральних чисел: 1; 4; 9; 16; 25. У цьому випадку с1= 1; с2= 4; с3= 9; с4= 16.

Розглянемо два сусідніх члени послідовності з номерами k і k + 1, а саме аkі аk+1. Член аk+1 називають наступним за аk, а член аk називають попереднім по відношенню до аk+1.

Послідовність, що містить скінченне число членів, називають скінченною, а послідовність, яка містить нескінченне число членів — нескінченною.

Послідовність двоцифрових натуральних чисел — скінченна, а послідовність квадрантів натуральних чисел — нескінченна.

﻿**2. Числові послідовності, що задані формулою.**

Зручним є задання числової послідовності формулою n-го (або загального) члена послідовності. Наприклад, послідовність двоцифрових натуральних чисел 10; 11; 12 ..., 98, 99 можна задати формулою

сn = n + 9,

де 1 ≤ n ≤ 90, n - натуральне число. Послідовність квадрантів натуральних чисел задаємо формулою n-го члена: сn = n2, де n - натуральне число.

Приклад. Послідовність задана формулою сn = n2 + n. Знайдіть перший, сьомий, і сотий члени цієї послідовності.

Розв’язання. Маємо с1 = 12 + 1 = 2; с7 = 72 + 7 = 56; с100 = 1002 + 100 = 10100.

**3. Числові послідовності, що задані переліком її членів.**

Скінченну числову послідовність можна задавати переліком її членів. Наприклад, (сn): 1; 9; 5; 14. У цій послідовності: с1 = 1; с2 = 9; с3 = 5; с4= 14.

**4. Задання числових послідовностей описом її членів.**

Послідовність можна задавати описом її членів. Наприклад, послідовність чисел, що є натуральними дільниками числа 20, які взяті у порядку зростання: 1; 2; 4; 5; 10; 20.

﻿**5. Числові послідовності, що задані таблицями.**

Скінченну числову послідовність можна задати у вигляді таблиці. Наприклад

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| cn | -3 | 8 | 4 | -2 | 11 | 3 | -1 | 7 | 10 |

За цією таблицею можна, наприклад, визначити, що с1 = -3; с4 = -2; c9 = 10.

**6. Числові послідовності, що задані рекурентно.**

Послідовність можна задавати, визначивши перший або кілька перших членів послідовності, а потім - формулу, за якою можна визначити інші члени послідовності через попередні. Тому формулу називають рекурентною, а спосіб задання послідовності - рекурентним.

Приклад 1. Знайдіть другий, третій та четвертий члени послідовності (хn), заданої рекурентно: 

Розв’язання. Маємо 

Приклад 2. Знайдіть третій, четвертий і п’ятий члени послідовності (уn), заданої рекурентно: 

Розв’язання. Маємо



**§14. АРИФМЕТИЧНА ПРОГРЕСІЯ.**

**1. Означення арифметичної прогресії.**

Арифметичною прогресією називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого додається одне й те саме число, яке називають різницею арифметичної прогресії.

Приклад арифметичної прогресії: 2; 5; 8; 11; 14 ...

Члени арифметичної прогресії прийнято позначати буквою а з індексом, що відповідає порядковому номеру кожного члена: а1; а2; а3 ... , а різницю буквою d.

У розглянутій прогресії: а1 = 2; а2 = 5; а3 = 8.

Можна записати а2 = а1 + d, а3 = а2 + d, а4 = а3 + d... Отже, для будь-якого натурального п виконується рівність аn+1 = аn + d. Звідси випливає, що d = аn+1 – аn, тобто, різницю арифметичної прогресії можна знайти, якщо від будь-якого члена прогресії, починаючи з другого, відняти попередній.

У розглянутому прикладі: d = а2- а1 = 5 - 2 = 3.

**. Формула n-го члена арифметичної прогресії.**

Будь-який член арифметичної прогресії (аn) можна знайти за формулою

аn = a1 + d(n - 1)

Маємо формулу n-го члена арифметичної прогресії.

Приклад 1. Послідовність (аn) - арифметична прогресія, а1 = 18; d = -1,5. Знайдіть п’ятнадцятий член цієї послідовності.

Розв’язання. а15 = а1 + d(15 - 1) = а1 + 14d = 18 + 14 ∙ (-1,5) = -3

Приклад 2. Чи містить арифметична прогресія 5; 8; 11 ... число: 1) 80; 2) 100?

Розв’язання. У прогресії а1 = 5; а2 = 8; d = а2 – а1 = 8 - 5 = 3. Запишемо формулу n-го члена цієї прогресії: аn = 5 + 3(n - 1), тобто аn = 3n + 2.

1) Число 80 є членом прогресії (аn), якщо існує натуральне число n, при якому значення виразу 3n + 2 дорівнює 80. Маємо рівняння 3n + 2 = 80; 3n = 78; n = 26. Отже, число 80 є двадцять шостим членом арифметичної прогресії: а26 = 80.

2) Міркуючи аналогічно, маємо 3n + 2 = 100; 3n = 98; n = 32 ∙ 2/3. Число 32 ∙ 2/3 не є натуральним. Тому арифметична прогресія не містить число 100.

Приклад 3. Кубики покладено у ряди так, що у верхньому ряду 3 кубика, в кожному нижньому - на одну й ту саму кількість кубиків більше, ніж у попередньому. У шостому ряду 13 кубиків. Скільки кубиків у третьому ряді?

Розв’язання. Оскільки в кожному нижньому ряду на одну й ту саму кількість кубиків більше, ніж у попередньому, то числі, що виражають кількість кубиків по рядах, складають арифметичну прогресію.

Маємо а1 = 3; а6 = 13. Знайдемо спочатку d цієї прогресії, а потім третій член прогресії а3. Отже, а6 = а1 + d(6 - 1); а6 = а1 + 5d. Тоді

13 = 3 + 5d,

5d = 10;

d = 2.

Маємо а3 =а1 + 2d = 3 + 2 ∙ 2 = 7. У третьому ряду 7 кубиків.

**3. Властивості арифметичної прогресії.**

Розглянемо властивості арифметичної прогресії.

1. Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох сусідніх з ним членів, тобто



2. Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох рівновіддалених членів, тобто



3. Якщо k, l, р і s - натуральні числа, такі, що k + l = р + s, то



4. Будь-яку арифметичну прогресію можна задати формулою аn = dn + b, де d і b - деякі числа.

5. Послідовність аn, задана формулою n-го члена аn = dn + b, де d і b - деякі числа, є арифметичною прогресією.

﻿**4. Сума n перших членів арифметичної прогресії.**

Позначимо через Sn суму перших n членів арифметичної прогресії:



Цю суму можна знайти за формулою



Якщо у дану формулу замість аn підставити вираз а1 + d(n - 1), то дістанемо ще одну формулу для обчислення



Цією формулою зручно користуватись, якщо відомий перший член і різниця прогресії.

Приклад 1. Знайдіть суму перших дванадцяти членів послідовності (аn), заданої формулою аn = -3n + 5.

Розв’язання. Дана послідовність є арифметичною прогресією, бо її задано формулою аn = dn + b, де d = -3, b = 5 (див. властивість 5 попереднього пункту цього параграфа). Маємо а1 = -3 ∙ 1 + 5 = 2, а12 = -3 ∙ 12 + 5 = -31. Знайдемо SІ2 за формулою



Приклад 2. Знайдіть суму тридцяти перших членів арифметичної прогресії (аn), якщо а3 = 5; а7 = -3.

Розв’язання. Оскільки а3 = а1 + 2d, то маємо 5 = а1 + 2d .

Аналогічно а7 = а1 + 6d; -3 = а1+ 6d. Отримали систему рівнянь





Тоді а1= 5 + 4 ; а1 = 9. Знайдемо суму S30 за формулою



Приклад 3. Знайдіть суму всіх натуральних чисел, кратних 8, які не більше за 300.

Розв’язання. Натуральні числа, кратні 8, утворюють арифметичну прогресію: 8; 16; 24; 32; 40 ... Цю прогресію можна задати формулою аn = 8n. Знайдемо кількість членів цієї прогресії, виходячи з умови ап ≤ 300. Маємо

Sn≤ 300,

n = 37,5.

Отже, кількість членів прогресії, суму яких треба знайти, дорівнює 37. Маємо а1 = 8; а37 = 8 ∙ 37 = 296. Тоді:



**1. Означення геометричної прогресії.**

Геометричною прогресією називають послідовність, відмінних від нуля чисел, кожний член якої, починається з другого, дорівнює передньому, помноженому на одне й те саме число, яке називають знаменником геометричної прогресії.

Приклад геометричної прогресії: 3; 6; 12; 24; 48 ...

Члени геометричної прогресії прийнято позначати буквою b з індексом, що відповідає порядковому номеру кожного члена: b1, b2, b3 ... , а знаменник буквою q.

У розглянутому прикладі b1 = 3; b2 = 6; b3 = 12 ...

Можна записати: b2 = b1q; b3 = b2q; b4 = b3q ... Отже, для будь-якого натурального n виконується рівність bn+1 = bnq. Звідси випливає, що  тобто знаменник геометричної прогресії можна знайти якщо будь-який член прогресії, починаючи з другого, поділити на попередній.

У розглянутому прикладі 

**2. Формула n-го члена геометричної прогресії.**

Будь-який член геометричної прогресії (bn) можна знайти за формулою



Маємо формулу n-го члена геометричної прогресії.

Приклад 1. Послідовність (bn) - геометрична прогресія, b1 = -81; q = 1/3. Знайдіть b6.

Розв’язання. 

Приклад 2. Знайдіть знаменник q геометричної прогресії (bn), якщо b7 = 3, b9 = 12.

Розв’язання. І спосіб. Маємо 

Тоді 

II спосіб.  Маємо 

**3. Властивості геометричної прогресії.**

Розглянемо властивості геометричної прогресії.

1. Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи з другого дорівнює добутку двох сусідніх з ним членів, тобто



2. Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює добутку двох рівновіддалених від нього членів, тобто



3. Якщо k, l, р і s - натуральні числа, такі, що k + l = р + s, то



**§15. ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЯ.**

**4. Сума n перших членів геометричної прогресії.**

Позначимо через Sn суму перших n членів геометричної прогресії: 

Цю суму можна знайти за формулою



Якщо відомий перший, n-й члени прогресії та її знаменник, то зручною є формула:



Приклад 1. Знайдіть суму перших шести членів геометричної прогресії 3; -6; 12 ...

Розв’язання. І спосіб. 

Маємо 

II спосіб. Відомо, що 

Маємо 

Приклад 2. Знайдіть суму перших семи членів геометричної прогресії (bn), якщо b2 = 3; b5= 81.

Розв’язання. Оскільки  то



Тоді 

**§16. НЕСКІНЧЕННА ГЕОМЕТРИЧНА ПРОГРЕСІЯ (|q|<1) ТА ЇЇ СУМА.**

**1. Сума нескінченної геометричної прогресії при |q|<1.**

Якщо в геометричній прогресії |q| < 1, то її називають нескінченно спадною.

Границю суми її членів  називають сумою нескінченної геометричної прогресії. Цю суму обчислюють за формулою



Приклад 1. Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії 4; -1; ¼…

Розв’язання.  Умова |q| < 1 виконується.

Отже,



Приклад 2. Другий член нескінченної прогресії зі знаменником |q| < 1 дорівнює 2, а сума прогресії дорівнює 8. Знайдіть перший член та знаменник прогресії.

Розв’язання. За умовою b2 = 2; S = 8. Звідси, виразивши b2 і S через b1 і q дістанемо систему:



Маємо  Тоді 

**2. Перетворення нескінченно десяткових періодичних дробів у звичайні.**

За допомогою суми нескінченної геометричної прогресії можна записувати нескінченні десяткові періодичні дроби у вигляді звичайних.

Приклад 1. Записати нескінченний десятковий періодичний дріб 0,(2) у вигляді звичайного дробу.

Розв’язання. Оскільки 0,(2) = 0,222..., то нескінченний періодичний дріб можна записати у вигляді суми:

0,(2) = 0,2 + 0,02 + 0,002 + 0,0002 + ...

Доданки 0,2; 0,02; 0,002; 0,0002 ... — члени нескінченної геометричної прогресії, перший член якої дорівнює 0,2, а знаменник (умова |q| < 1 виконується). Сума цієї прогресії



Отже, 0,(2) = 2/9.

Приклад 2. Знайти нескінченний десятковий періодичний дріб 3,2(18) у вигляді звичайного дробу.

Розв’язання.

3,2(18) = 3,2181818... = 3,2 + 0,018 + 0,00018 + 0,0000018 + ...

Доданки 0,018; 0,00018; 0,0000018 ... — члени нескінченної арифметичної прогресії, перший член дорівнює 0,018, а знаменник  (умова |q| < 1 виконується). Сума цієї прогресії



Тому  Отже, 

﻿