**Розділ II. РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ**

**§26. ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ.**

Рівняння називають показниковим, якщо його невідомі входять лише до показників степенів при сталій основі.

Приклади показникових рівнянь:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1136.jpg тощо.

**1. Рівняння ах = b, де ах = b.**

Якщо b ≤ 0, то рівняння ах = b, а > 0, а ≠ 1 не має розв’язків, оскільки вираз ах приймає лише додатні значення.

Якщо b > 0, то рівняння має єдиний розв’язок, який використовуючи основну логарифмічну тотожність можна записати так х = loga b.

Зауважимо, що, якщо b = ас ,то маємо ах = ас і звідки х = с.

Приклад 1. Розв’яжіть рівняння: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1137.jpg

Розв’язання. http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1138.jpg

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1139.jpg

3) 4х = 0. Рівняння не має розв’язків.

Аналогічно розв’язуються рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1140.jpg

Приклад 2. Розв’яжіть рівняння: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1141.jpg

Розв’язання. 1) Оскільки http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1142.jpg то маємо

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1143.jpg

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1144.jpg

**2. Рівняння af(x) = ag(x), де а > 0, а ≠ 1.**

Рівняння af(x) = ag(x), де а > 0, а ≠ 1, рівносильне рівнянню f(х) = g(x).

Приклад. Розв’яжіть рівняння:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1145.jpg

Розв’язання. http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1146.jpg

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1147.jpg

**§26. ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ.**

**3. Зведення показникових рівнянь до найпростіших способом винесення спільного множника за дужки.**

Цей спосіб можна використовувати у випадку, коли рівняння містить кілька виразів виду http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1148.gif, де mi — різні числа. Тоді використовуємо формулу http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1148.gif= ахhttp://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1149.gif та виносимо за дужки спільний множник. Після спрощень отримаємо рівняння виду ах = b.

Приклад. Розв’яжіть рівняння: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1150.jpg

Розв’язання.



**4. Рівняння виду af(x) = bf(x), де а > 0, а ≠ 1, b > 0, b ≠ 1.**

Поділимо ліву і праву частини рівняння af(x) = bf(x) (де а > 0, а ≠ 1, b > 0, b ≠ 1) на bf(x) ≠ 0. Тоді (a/b)f(x) =1, а, отже, f(х) = 0.

Приклад. Розв’яжіть рівняння: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1152.jpg

Розв’язання. Поділимо ліву і праву частини рівняння на 7Х+1 ≠ 0. Маємо

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1153.jpg

**5. Заміна змінних у показникових рівняннях.**

Досить часто показникові рівняння можна звести до алгебраїчного за допомогою заміни t = af(x), зауважимо, що t > 0.

Приклад 1. Розв’яжіть рівняння: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1154.jpg

Розв’язання. Заміна 4х = t , t > 0. Тоді http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1155.jpg Маємо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1156.jpg — не задовольняє умову t > 0.

Отже, http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1157.jpg

Приклад 2. Розв’яжіть рівняння: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1158.jpg

Розв’язання. Заміна http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1159.jpg Маємо рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1160.jpg Розв’язавши його, матимемо t1 = 4; t2 = -2,5 - не задовольняє умову t> 0. Тоді

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1161.jpg

**6. Однорідні показникові рівняння.**

Рівняння виду http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1162.jpg є однорідним показниковим рівнянням другого степеня.

Метод розв’язання такого рівняння полягає в діленні лівої і правої частини на b2f(х) ≠ 0 (або на а2f(x) ≠ 0). Тоді маємо

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1163.jpg

Далі заміна http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1164.jpg

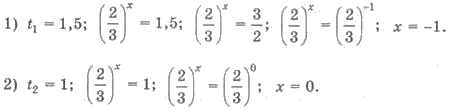
Приклад. Розв’яжіть рівняння: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1165.jpg

Розв’язання. Оскільки http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1166.jpg то рівняння зводиться до однорідного http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1167.jpg

Ділимо ліву і праву частини рівняння на 32х ≠ 0.

Маємо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1168.jpg

Заміна http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1169.jpg Тоді http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1170.jpg Маємо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1171.jpghttp://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1172.jpg



**§27. ПОКАЗНИКОВІ НЕРІВНОСТІ.**

**1. Нерівності виду ax ≥ b, ax > b, ax ≤ b, ax < b, де a > 0, a ≠ 1.**

Оскільки аx > 0 для всіх значень х при а > 0, а ≠ 1, то у випадку b ≤ 0 множиною розв’язків нерівностей ах ≥ b, ах > b є множина R, а нерівності ах ≤ b, ах < b не будуть мати розв’язків.

Приклад 1. Розв’яжіть нерівності: 1) 2x ≥ -5; 2) 3x < -1.

Розв’язання. http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1174.jpg

2) 3x < -1, нерівність не має розв’язків.

Розглянемо нерівність ах ≥ b при а > 0, а ≠ 1, b > 0. Схему розв’язання цієї нерівності подамо у вигляді таблиці.

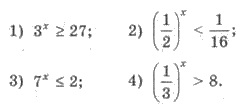
|  |  |
| --- | --- |
| ах ≥ b; а > 0, а ≠ 1, b > 0 | |
| 0 < а < 1 | а > 1 |
| Знак нерівності змінюється на протилежний х ≤ loga b | Знак нерівності не змінюється х ≥ loga b |

Зауважимо, що нерівності http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1175.jpg розв’язуються аналогічними методами. Якщо и = ас, де с - деяке число, то відповідно матимемо:

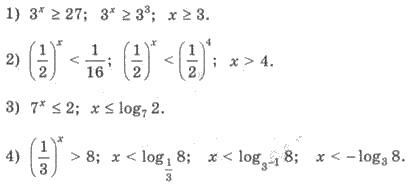
для http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1176.jpg

для http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1177.jpg

Приклад 2. Розв’яжіть нерівності:



Розв’язання.



Аналогічно розв’язуються нерівності у випадку, коли замість x маємо f(x).

Приклад 3. Розв’яжіть нерівність: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1180.jpg

Розв’язання. http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1181.jpg

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1182.jpg (мал. 47).



**2. Нерівності виду af(x) ≥ ag(x), af(x) > ag(x) , де a > 0, a ≠ 1.**

Метод розв’язування нерівності ах ≥ b можна узагальнити для нерівностей виду af(x) ≥ ag(x), af(x) > ag(x) , де a > 0, a ≠ 1. Подамо метод розв’язування нерівності у вигляді таблиці.

|  |  |
| --- | --- |
| af(x) ≥ ag(x) | |
| 0 < а < 1 | а > 1 |
| Знак нерівності змінюється на протилежний f(х) ≤ g(x) | Знак нерівності не змінюється f(х) ≥ g(x) |

Аналогічно розв’язується нерівність виду af(x) > ag(x).

Приклад. Розв’яжіть нерівності: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1184.jpg

Розв’язання.

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1185.jpg

2) Оскільки 0 < ½ < 1, то маємо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1186.jpghttp://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1187.jpg Розв’язавши цю нерівність, маємо х ≤ -1 або х ≥ 4 (мал. 48).



**3. Розв’язування складніших показникових нерівностей.**

При розв’язуванні більш складних показникових нерівностей використовують ті самі прийоми, що й при розв’язуванні рівнянь: спосіб винесення за дужки спільного множника, заміну змінних тощо, намагаючись зводити нерівності до найпростіших.

Приклад 1. Розв’яжіть нерівність: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1189.jpg

Розв’язання. http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1190.jpg

Приклад 2. Розв’яжіть нерівність: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1191.jpg

Розв’язання. Заміна http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1192.jpg Розв’язуючи цю нерівність, отримаємо t < -1 або t > 3. Повертаємося до змінної х:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1193.jpg - немає розв’язків.

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1194.jpg

Отже, розв’язками нерівності є множина (-∞;-1).

**§28. ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ.**

Рівняння називають логарифмічним, якщо його невідомі входять лише під знаками логарифмів.

Приклади логарифмічних рівнянь: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1195.jpg тощо.

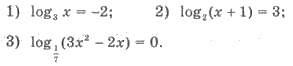
Розглянемо деякі види логарифмічних рівнянь та методи їх розв’язання.

**1. Рівняння виду loga x = b.**

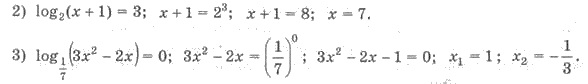
Рівняння loga х = b, де a > 0, а ≠ 1, b — будь-яке число можна розв’язати використовуючи означення логарифма. Отримаємо: х = аb.

Аналогічно розв’язуються рівняння, в яких замість х у рівняння входить f(x).

Приклад. Розв’яжіть рівняння:



Розв’язання. http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1197.jpg



**2. Рівняння виду loga f(x) = loga g(x).**

Рівняння виду http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1199.jpg рівносильне системі http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1200.jpg або системі http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1201.jpg

Приклад. Розв’яжіть рівняння: lg(х2 + 2х - 7) = lg(x - 1).

Розв’язання. Рівняння рівносильне системі:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1202.jpg

Розв’язками рівняння х2 + х - 6 = 0 є числа х1 = 2; х2 = -3. Але лише перший з них задовольняє умову х > 1. Отже х = 2 - єдиний корінь початкового рівняння.

**3. Рівняння виду loga f(x) = g(x).**

Рівняння виду http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1203.jpg рівносильне рівнянню http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1204.jpg

Приклад. Розв’яжіть рівняння: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1205.jpg

Розв’язання. Рівняння рівносильне такому 3 ∙ 2х - 4 = 2х. Далі маємо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1206.jpg

**4. Рівняння, які зводяться до найпростіших за допомогою формул логарифмування.**

При розв’язуванні більш складних логарифмічних рівнянь можна дотримуватися наступної схеми:

1) Знаходимо ОДЗ рівняння.

2) За допомогою формул логарифмування зводимо рівняння до виду span lang=EN-US style='font-family:"Verdana","sans-serif"'>logaf(x) = b або до виду logaf(x) = logag(x).

3) Розв’язуємо отримане рівняння.

4) Перевіряємо корені на предмет входження в ОДЗ початкового рівняння та даємо відповідь.

Приклад 1. Розв’яжіть рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1207.jpg

Розв’язання. ОДЗ рівняння знайдемо з системи http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1208.jpg тобто х > 0.

Маємо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1209.jpg http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1210.jpg

ОДЗ рівняння задовольняє лише перший корінь. Отже, х = 0,5 — єдиний корінь рівняння.

Приклад 2. Розв’яжіть рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1211.jpg

Розв’язання. ОДЗ рівняння знайдемо із системи http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1212.jpg

Домножимо ліву і праву частини рівняння на 2, щоб позбутися дробів:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1213.jpg

Використаємо формулу логарифмування:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1214.jpg

Тоді http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1215.jpg x1 = 10; х2 = -2. ОДЗ рівняння задовольняє лише перший корінь. Отже, x = 10 — єдиний корінь рівняння.

**5. Заміна змінних у логарифмічних рівняннях.**

Часто логарифмічні рівняння зводяться до алгебраїчних заміною loga f(х) = t.

Приклад 1. Розв’яжіть рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1216.jpg

Розв’язання. Заміна http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1217.jpg Маємо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1218.jpg

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1219.jpg

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1220.jpg

Приклад 2. Розв’яжіть рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1221.jpg

Розв’язання. Маємо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1222.jpg Заміна log27x = t. Тоді

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1223.jpg

1) t1 = -1; log27x = -1; х = 27-1; х1= 1/27.

2) t2= 2/3; log27 х = 2/3; х = 272/3; x1 = (З3)2/3; х2 = 9.

Отже, http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1224.jpg

**§29. ЛОГАРИФМІЧНІ НЕРІВНОСТІ.**

По аналогії з рівняннями, нерівності називають логарифмічними, якщо в цю нерівність невідома входить лише під знаком логарифма.

**1. Нерівності виду loga x ≥ b, loga x > b, loga x ≤ b, loga x < b.**

При розв’язуванні нерівностей виду logax ≥ b, logax > b, logax ≤ b, logax < b можна користуватися наступними принципами:

1) якщо а > 1, то при переході до нерівності-неслідну знак нерівності залишимо без змін; якщо 0 < а < 1, то знак нерівності змінюємо на протилежний.

2) якщо в отриманій нерівності-неслідну є гарантія виконання ОДЗ: х > 0, то отриману нерівність нічим не доповнюємо; якщо такої гарантії немає, то доповнюємо дану нерівність умовою х > 0.

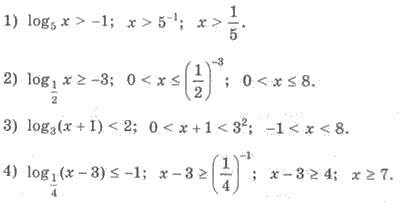
Покажемо (у вигляді схеми) як дані принципи використовуються, наприклад, при розв’язуванні нерівності loga х > b.

|  |  |
| --- | --- |
| logax ≥ b a > 0, a ≠ 0, b – будь-яке число | |
| 0 < а < 1 | а > 1 |
| Знак нерівності змінюється на протилежний  0 < x ≤ ab | Знак нерівності не змінюється  x ≥ ab |

Аналогічно розв’язуються нерівності, у яких замість х, у нерівність входить f(x).

Приклад. Розв’яжіть нерівність: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1225.jpghttp://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1226.jpg

Розв’язання.



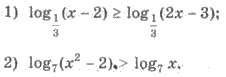
**2. Нерівності виду loga f(x) ≥ loga g(x), loga f(x) > loga g(x).**

Подамо метод розв’язування нерівності logaf(x) ≥ logag(x)у вигляді таблиці:

|  |  |
| --- | --- |
| logaf(x) ≥ logag(x) | |
| 0 < а < 1 | а > 1 |
| Знак нерівності змінюється на протилежний  http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1228.jpg | Знак нерівності не змінюється  http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1229.jpg |

Нерівність виду logaf(x) > logag(x) розв’язується аналогічно.

Приклад. Розв’яжіть нерівність:



Розв’язання. 1) Оскільки 0 < 1/3 < 1, то знак нерівності змінюємо на протилежний х – 2 ≤ 2х - 3. Крім того треба врахувати х – 2 > 0 (тоді умова 2х - 3 > 0 буде виконуватися автоматично). Отже, нерівність рівносильна системі:

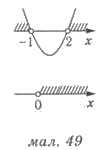
http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1231.jpg

2) Оскільки 7 > 1, то знак нерівності не змінюємо х2 - 2 > х. Крім того треба врахувати х > 0 (умова х2 - 2 > 0 виконується автоматично).

Отже, маємо:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1232.jpg

Розв’язки першої нерівності: х < -1 і х > 2 (мал. 49 — схема вгорі). Враховуючи х > 0, маємо розв’язки: х > 2.



Отже, розв’язком початкової нерівності є множина: х > 2.

**3. Розв’язування складніших логарифмічних нерівностей.**

При розв’язуванні більш складних логарифмічних нерівностей використовуємо прийоми розв’язування логарифмічних рівнянь та принципи за якими розв’язуються найпростіші логарифмічні нерівності.

Приклад 1. Розв’яжіть нерівність: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1234.jpg

Розв’язання. Область допустимих значень знайдемо із системи:

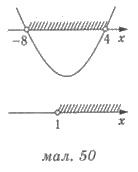
http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1235.jpg

На цій області визначення маємо (х - 1)(х + 5) < 3. Оскільки 3 > 1, то знак нерівності не змінюємо: (х - 1)(х + 5) < 33.

При х > 1 умова (х - 1)(х + 5) > 0 виконується автоматично.

Маємо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1236.jpg

Звідки -8 < х < 4 (мал. 50 — схема вгорі). Необхідно врахувати область визначення: х > 1 (мал. 50 — схема внизу).



Відповіддю до початкової нерівності є переріз множин -8 < х < 4 і х > 1, тобто 1 < х < 4.

Приклад 2. Розв’яжіть нерівність: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1238.jpg

Розв’язання. Заміна http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1239.jpg Тоді t2– 2t – 3 ≥ 0, звідки t ≤ -1 або t ≥ 3 (мал. 51). Маємо:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1240.jpg

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1241.jpg



Отже, розв’язками початкової нерівності є об’єднання множин х ≥ 2 і http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1243.jpg

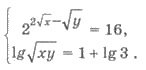
**§30. СИСТЕМИ, ЩО МІСТЯТЬ ПОКАЗНИКОВІ І ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ.**

При розв’язуванні системи, що містять показникові і логарифмічні рівняння, використовують прийоми розв’язування систем (спосіб підстановки, спосіб додавання, заміну змінних) та методи розв’язування показникових і логарифмічних рівнянь.

Приклад 1. Розв’яжіть систему рівнянь: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1244.jpg

Розв’язання. Помножимо перше рівняння системи на друге, маємо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1245.jpg Звідси y = 3 – x.Підставимо у перше рівняння початкової системи: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1246.jpghttp://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1247.jpg

Отже, (2;1) — розв’язок системи рівнянь.

Приклад 2. Розв’яжіть систему рівнянь: 

Розв’язання. Оскільки 16 = 24 і х > 0 і y > 0, то маємо:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1249.jpg

Заміна http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1250.jpg Маємо: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1251.jpg

Враховуючи t > 0 і z > 0, отримаємо t = 5; z = 6. Тоді http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image950.gif = 5; х = 25; http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1252.gif = 6; у = 36. Отже, (25;36) — розв’язок системи.

Приклад 3. Розв’яжіть систему рівнянь: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1253.jpg

Розв’язання. Із другого рівняння системи дістаємо: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1254.jpg

Підставимо у перше рівняння замість х вираз 5 - у. Маємо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1255.jpghttp://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1256.jpg

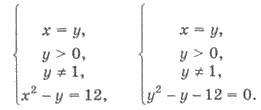
Тоді, х = 5 - у; х = 5 - 7; х = -2. Отже, (-2;7) — розв’язок системи.

Приклад 4. Розв’яжіть систему рівнянь: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1257.jpg

Розв’язання. Із першого рівняння системи дістанемо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1258.jpg

Заміна http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1259.jpg

Значить, logух = 1. Початкова система рівносильна такій:



Звідси, у = 4, тоді х = 4.

Отже, (4;4) — розв’язок системи.

Приклад 5. Розв’яжіть систему рівнянь: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1261.jpg

Розв’язання. Логарифмуючи друге рівняння за основою 2 (враховуючи додатність лівої частини рівняння), дістанемо: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1262.jpg Маємо

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1263.jpg

Звідси у1 = 3, тоді http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1264.jpghttp://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1265.jpg

Отже, пари (4;3) і (1/8;-2) — розв’язки системи рівнянь.

**КОНТРОЛЬНИЙ ТЕСТ № 7**