**§22. ПЕРВІСНА. ТАБЛИЦЯ ПЕРВІСНИХ. ПРАВИЛА ЗНАХОДЖЕННЯ ПЕРВІСНИХ.**

**1. Означення первісної.**

Функцію F(х) називають первісною для функції f(x) на заданому проміжку, якщо для всіх х з цього проміжку F'(х) = f(х).

Приклад. Для функції f(х) = 2х на інтервалі (-∞;+∞) первісною є функція F(х) = х2, оскільки кожного х з цього інтервалу виконується рівність http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1744.jpg

**2. Основна властивість первісних.**

Повертаючись до прикладу попереднього пункта, можна зауважити, що наприклад функція F1(х) = х2 + 1 має ту саму похідну, що й функція F(х) = х2, дійсно (х2 + 1)’ = 2х. Тому функція F1(х) = х2 + 1 є також первісною для функції f(х) = 2х. Зрозуміло, що замість числа 1 можна поставити будь-яке інше число С, та матимемо (х2 + C)’ = 2х.

Приходимо до основної властивості первісної: кожна з первісних для функції f(x) на заданому проміжку має вигляд F(х) + С, де F(х) - одна з цих первісних, а С - довжина стала.

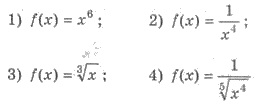
**3. Таблиця первісних.**

Для знаходження первісних деяких функцій, корисною є таблиця первісних.

|  |  |
| --- | --- |
| Функція f(x) | Загальний вигляд первісних F(х)+С , де С - довільна стала |
| 0 | С |
| 1 | х + С |
| xα, α ≠ -1 | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1745.jpg |
| 1/x | ln|х| + С |
| sin x | -соs х + С |
| cos x | sіn х + С |
| 1/cos2 x | tg х + С |
| 1/sin2 x | -ctg x + С |
| ex | ех + С |
| ax (a > 0; a ≠ 1) | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1746.jpg |

Розглянемо приклади.

Приклад 1. Знайдіть усі первісні для функції:



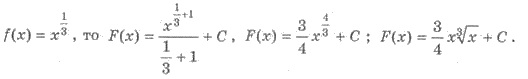
Розв’язання. Використаємо те, що загальний вигляд первісних для функції xα має вигляд http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1748.jpg

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1749.jpg

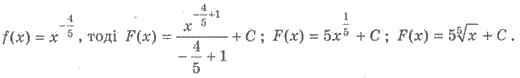
2) Оскільки

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1750.jpg

3) Оскільки



4) Маємо



Приклад 2. Для функції f(х) = sіn х знайдіть первісну, графік якої проходить через точку http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1753.jpg

Розв’язання. Загальний вигляд первісних для функції f(х) = sіn х такий F(х) = -соs х + С.

За умовою графік шуканої первісної проходить через точку http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1753.jpg Тому підставляємо π/3 замість х, а -1 ∙ (1/2) замість F(х) у загальний вигляд первісної, матимемо

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1754.jpg

Отже, шукана первісна F1(x) = - cos х - 1.

﻿**4. Правила знаходження первісних.**

1) Якщо F - первісна для f, a G - первісна для g, то F + G - первісна для f + g.

2) Якщо F - первісна для f, а k - стала, то kF - первісна для kf.

3) Нехай F(x) - первісна для f(х), a k і b - деякі сталі, причому k ≠ 0. Тоді 1/k ∙ F(kx + b) - первісна для функції f(kx + b).

Розглянемо приклади використання цих правил.

Приклад 1. Знайдіть загальний вигляд первісних для функцій:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1755.jpg

Розв’язання.

1) Оскільки х5/5 первісна для х4, a tg x - первісна для 1/cos2 x, то використовуючи правило 1, матимемо загальний вигляд первісних для заданої функції:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1756.jpg

2) Оскільки ех - первісна для еsup>х, то використовуючи правило 2, матимемо загальний вигляд первісних для заданої функції F(х) = 7ех + С.

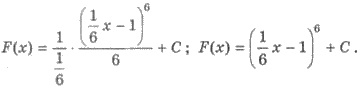
Приклад 2. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1757.jpg

Розв’язання. Для соs х однією з первісних є sin х. Використовуючи правило 3, матимемо загальний вигляд первісних для заданої функції:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1758.jpg

Приклад 3. Для функції http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1759.jpg знайдіть первісну F(x) таку, що F(12) = 3.

Розв’язання. Використовуючи правило 3 та той факт, що однією з первісних для функції х5 є x6/6 матимемо:



Оскільки F(12) = 3, то матимемо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1761.jpg

Отже, http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1762.jpg - шукана первісна.

**§23. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНІЦА.**

Дамо одне з означень визначеного інтегралу.

Визначеним інтегралом від неперервної на [а;b] функції f(x) з нижньою межею а і верхньою межею b називають різницею F(b) - F(a), де F(x) - одна з первинних для функції f(x). Позначають визначений інтеграл так http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1763.giff(x)dx.

При обчисленні різниці F(b) - F(а) можна брати будь-яку з первісних функцій f(х), що записуються в загальному вигляді F(x) + С. Але прийнято застосовувати ту первісну для якої С = 0.

За наведеним означенням маємо:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1764.jpg

Цю формулу називають формулою Ньютона-Лейбніца.

Зауважимо, що при обчисленні визначених інтегралів зручно різницю F(b) - F(a) записують так F(x) http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1763.gif. Застосовуючи це позначення формулу Ньютона-Лейбніца записують ще й у такому вигляді:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1765.jpg

Розглянемо приклади знаходження визначень інтегралів.

Приклад 1. Обчисліть інтеграл http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1766.gifsіn хdх.

Розв’язання. Для функції f(х) = sin х однією з первісних є F(х) = -cos х. Маємо за формулою Ньютона-Лейбніца

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1767.jpg

Приклад 2. Обчисліть інтеграл http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1768.jpg

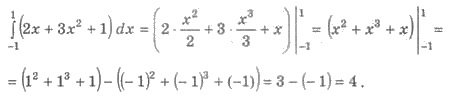
Розв’язання. Спочатку знайдемо первісну для функції f(х) = 2х + 3х2 + 1. Використовуючи правила обчислення первісних та таблицю первісних, маємо:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1769.jpg

Матимемо

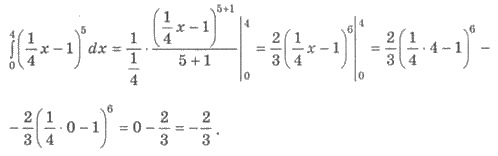
http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1770.jpg

Зауважимо, що при оформленні цього прикладу знаходження первісної можна було не записувати окремо. Тоді оформлення набуде наступного вигляду:



Приклад 3. Обчисліть інтеграл http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1772.jpg

Розв’язання. Використаємо правило 3 знаходження первісних. Маємо

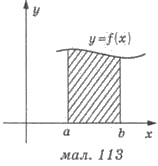


**§24. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА ДО ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ КРИВОЛІНІЙНИХ ТРАПЕЦІЙ ПЛОЩ ПЛОСКИХ ФІГУР ТА ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ.**

**1. Означення криволінійної трапеції та знаходження її площі.**

Нехай на відрізку [а;b] осі абсцис задано неперервну функцію у = f(x), яка на цьому відрізку набуває лише тільки невід’ємні значення. Фігуру, обмежену графіком функції у = =f(х), віссю абсцис та прямими х = а, х = b називають криволінійною трапецією (мал. 113). Її площу S можна знайти за допомогою визначеного інтеграла

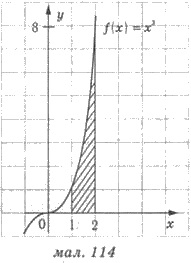
http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1774.jpg



Приклад 1. Обчисліть площу криволінійної трапеції, обчисленої графіком функції f(х) = х3 та прямими у = 0; х = 1; х = 2.

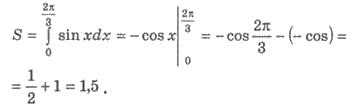
Розв’язання (мал. 114). Маємо

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1776.jpg



Приклад 2. Обчисліть площу криволінійної трапеції обмеженої графіком функції f(x) = sin х та прямими http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1778.jpg

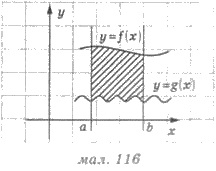
Розв’язання (мал. 115). Маємо



**2. Обчислення площ плоских фігур.**

Розглянемо площу фігур зверху обмежену графіком функцій у = /(х), знизу - графіком функції у = f(х) та вертикальними прямими х = а і х = b, причому функції у = f(x) і у = g(х) - неперервні на [а;b] і для всіх значень х http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image013.gif [а;b] виконується нерівність f(x) ≥ g(x) (мал. 116). Тоді площу Sтакої плоскої фігури можна знайти за формулою:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1781.jpg

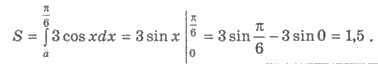


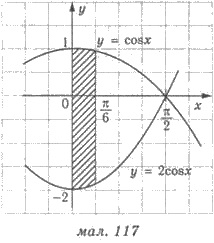
Приклад 1. Знайдіть площу фігур, обмежену графіками функцій у = соs х, у = -2 соs х та прямими x = 0 i x = π/6.

Розв’язання (мал. 117). Маємо

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1783.jpg

Підінтегральний вираз можна спростити. Отримаємо

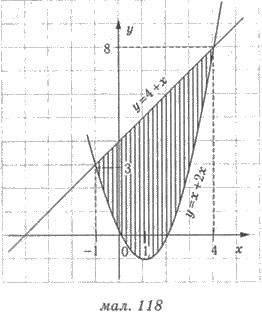




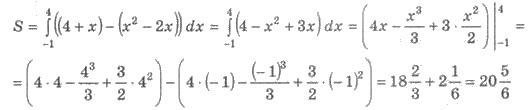
Приклад 2. Знайдіть площу фігури, обмежену графіками функцій у = х2 - 2х і у = 4х + х.

Розв’язання. Знайдемо абсциси точок перетину графіків функцій: х2 - 2х = 4 + х; х2 - 3х - 4 = 0; x1 = -1; x2 = 4.

Ординати точок перетину y1 = 3; у2 = 8. Зображуємо графіки функцій схематично (мал. 118).



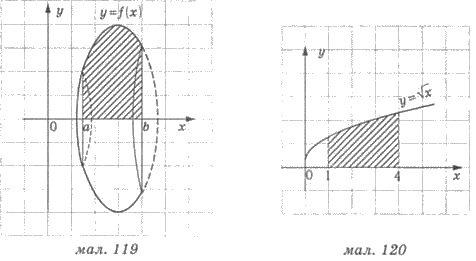
Шукана площа



**3. Обчислення об’єму тіла обертання.**

Нехай криволінійна трапеція, обмежена графіком неперервної на [а;b] функції у = f(x), такою що f(х) ≥ 0 для кожного х http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image013.gif [а;b] та прямими у= 0; х = а; х = b, обертається навколо осі абсцис (мал. 119). Тоді об’єм утвореного тіла обертання можна знайти за формулою:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1788.jpg



Приклад. Знайдіть об’єм тіла, отриманого обмеженням навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої лініями у = http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image950.gif; у = 0; x = 1; x = 4.

Розв’язання. Криволінійна трапеція, що обертається подана на малюнку 120. Об’єм утвореного тіла

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1790.jpg

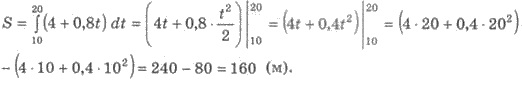
**4. Переміщення матеріальної точки, що рухається прямолінійно.**

Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно зі швидкістю, що в кожний момент часу визначається за формулою υ = υ(t). Тоді за проміжок часу шлях S, який пройшла точка, визначається формулою:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1791.jpg

Приклад. Матеріальна точка рухається прямолінійно з швидкістю υ(t) = 4 + 0,8t (м/с). Знайдіть шлях, який пройде точка за проміжок часу від t1= 10с до t2 = 20 с.

Розв’язання. Маємо



**5. Робота сили, що діє на матеріальну точку.**

Нехай матеріальна точка рухається вздовж осі абсцис під дією сили, проекція якої на цю вісь - неперервана на [а;b] функція f(x). І нехай під дією цієї сили матеріальна точка переміщується з точки М(а) в точку N(b). Тоді роботу А цієї сили можна обчислити за формулою:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1793.jpg

Приклад. Обчисліть роботу сили F при розтягу пружини на 0,1 м, якщо при розтягу пружини на 0,02 м потрібна сила 6Н.

Розв’язання. За законом Гука, сила F пропорційна розтягу (або стиску) пружини, тобто F = kх, де х - величина розтягу або стиску, k-постійна.

Оскільки при х = 0,02 м маємо F = 6Н, то можна знайти коефіцієнт http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1794.jpg Отже F = 300x. Роботу А по розтягу пружини на 0,1 мзнайдемо так

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1795.jpg

