**КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ**

**1. Означення квадратного рівняння.**

Квадратним рівнянням називають рівняння виду ах2 + bх + с = 0, де х - змінна, а, b і с - деякі числа, причому а ≠ 0.

Приклади квадратних рівнянь: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image665.jpg

Квадратне рівняння, у якого коефіцієнт а = 1, називають зведеним квадратним рівнянням.

﻿**2. Неповне квадратне рівняння.**

Якщо в квадратному рівнянні ах2 + bх + с = 0 хоча б один з коефіцієнтів b або с дорівнює нулю, то таке рівняння називають неповним, квадратним рівнянням.

Є три види неповних квадратних рівнянь. Методи їх розв’язання подамо у вигляді таблиці.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image666.jpg | | | |
| http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image667.jpg | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image668.jpg | | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image669.jpg |
| http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image670.jpg | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image671.jpg | | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image672.jpg |
| http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image673.jpg | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image674.jpg |
| http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image675.jpg | рівняння не має розв’язків |

Приклад 1. Розв’яжіть рівняння: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image676.jpg

Розв’язання. http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image677.jpg

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image678.jpg

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image679.jpg рівняння не має розв’язків.

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image680.jpg

Приклад 2. Розв’яжіть рівняння (x + 2)(х - 3) = -6.

Розв’язання. Виконаємо рівносильні перетворення рівняння х2 + 2х - Зх - 6 = -6 ; х2 - х = 0. Розв’яжемо отримане неповне квадратне рівняння: х(х - 1) = 0 ; х1 = 0 ; х2 = 1.

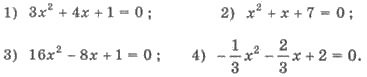
**3. Формули коренів квадратного рівняння.**

Вираз b2 - 4ас називають дискримінантом квадратного рівняння ах2 + bх + с = 0, і позначають буквою D.

Схему розв’язування квадратного рівняння ах2 + bх + с = 0, де а ≠ 0, b ≠ 0 і с ≠ 0 подамо у вигляді таблиці.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image681.jpg | | |
| http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image682.jpg | | |
| D > 0 | D = 0 | D < 0 |
| http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image683.jpg | http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image684.jpg | рівняння не має розв’язків |

Приклад. Розв’яжіть рівняння:



Розв’язання. http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image686.jpg http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image687.jpg

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image688.jpg рівняння не має розв’язків.

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image689.jpg

4) Помножимо ліву і праву частини рівняння на (-3), щоб його коефіцієнти стали цілими числами: х2 + 2х - 6 = 0.

D = 22 - 4 ∙ 1 ∙ (- б) = 28 .

Тоді http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image690.jpg Оскільки http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image691.jpg то маємо

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image692.jpg

**ТЕОРЕМА ВІЄТА.**

Якщо х1 і х2 - корені зведеного квадратного рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image693.jpg то http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image694.jpg

Якщо х1 і х2 — корені квадратного рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image695.jpg то http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image696.jpg

Приклад 1. Рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image697.jpg має додатній дискримінант, то воно має корені х1 і х2. За теоремою Вієта

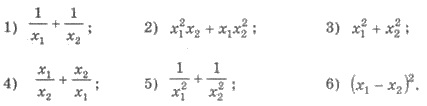
http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image698.jpg http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image699.jpg

Приклад 2. Один з коренів рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image700.jpg дорівнює 2. Знайдіть p та другий корінь.

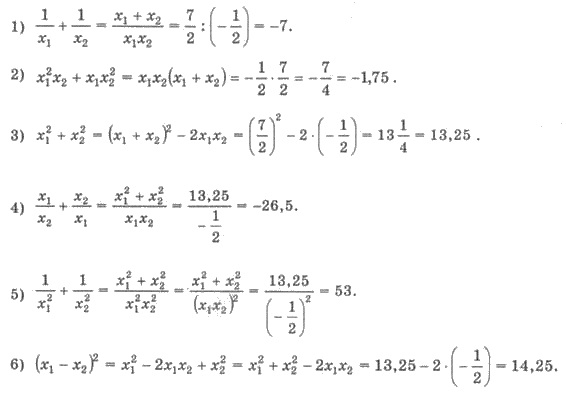
Розв’язання. За умовою х1 = 2 - корінь рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image701.jpg Нехай х2 - другий корінь цього рівняння. За теоремою Вієта http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image702.jpg Враховуючи х1 = 2 , маємо:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image703.jpg

Приклад 3. х1 і х2 - корені рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image704.jpg Не розв’язуючи рівняння, знайти:



Розв’язання. За теоремою Вієта http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image706.jpg Маємо:



**РОЗВ’ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ, ЩО ЗВОДЯТЬСЯ ДО КВАДРАТНИХ**

**1. Дробові раціональні рівняння.**

При розв’язуванні дробового раціонального рівняння можна використовувати різні способи. Розглянемо два з них.

Перший спосіб полягає у використанні умови рівності дробу нулю: дріб a/b дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли а = 0 і b ≠ 0.

Приклад 1. Розв’яжіть рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image708.jpg

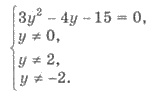
Розв’язання. Розкладемо на множники знаменники дробів та перенесемо дріб із правої частини рівняння в ліву

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image709.jpg

Зведемо дроби у лівій частині рівняння до спільного знаменника.

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image710.jpg

Останнє рівняння рівносильне системі:



Звідси отримаємо http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image712.jpg

Приклад 2. Розв’яжіть рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image713.jpg

Розв’язання. Розкладемо на множники знаменники дробів.

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image714.jpg

Домножимо обидві частини рівняння на спільний знаменник дробів - вираз х(х – 2)(х + 2) за умови, що він не дорівнює нулю. Маємо:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image715.jpg

Якщо х = 3, то х(х - 2)(х + 2) ≠ 0, отже, х = 3 - корінь початкового рівня. Якщо ж х = -2 , то х(х – 2)(х + 2) = 0, а тому х = -2 - не є коренем рівняння.

Отже, х = 3 - єдиний корінь початкового рівня.

**2. Метод розкладання многочлена на множники.**

Деякі рівняння, у лівій частині яких - многочлен, а у правій - нуль можна розв’язувати за допомогою розкладання многочлена на множники.

Приклад 1. Розв’яжіть рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image716.jpg

Розв’язання. Винесемо в лівій частині рівняння х за дужки: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image717.jpg

Звідси х = 0 або х2 + Зх - 4 = 0. Друге рівняння має корені х = 1; х = -4. Отже, рівняння х3 + Зх2 - 4х = 0 має корені х = 0, х = 1, х = -4.

Приклад 2. Розв’яжіть рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image718.jpg

Розв’язання. Оскільки http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image719.jpg то початкове рівняння рівносильне наступному: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image720.jpg

Звідси х - 3 = 0 або х2 + 1 = 0. Перше рівняння має корінь х = 3, а друге - коренів не має. Отже, рівняння х3 - Зх2 + х - 3 = 0 має єдиний корінь х = 3.

﻿**3. Біквадратні рівняння.**

Рівняння виду ах4 + bх2 + с = 0, де а 0, називають біквадратним рівнянням. Це рівняння можна розв’язати, вводячи нову змінну, а саме, позначивши х2 через t. Тоді початкове рівняння набуде вигляду аt2 + bt + с = 0.

Приклад. Розв’яжіть рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image721.jpg

Розв’язання. Зробимо заміну х2 = t, тоді маємо рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image722.jpg Це рівняння має корені t1 = 9; t2 = -4.

Повернемося до змінної х.

1) t1 = 9, тоді х2 = 9; х1 = 3; х2 = -3.

2) t2 = -4, тоді х2 = -4, рівняння не має розв’язків.

Отже, початкове рівняння має корені х1= 3; х2 = -3.

**4. Метод заміни змінних.**

Не лише біквадратні, а й деякі інші види рівнянь можна розв’язати допомогою заміни змінних.

Приклад 1. Розв’яжіть рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image723.jpg

Розв’язання. Зробимо заміну х2 - 2х = t. Тоді маємо рівняння для t: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image724.jpg

Повернемося до змінної х:

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image725.jpg

Отже, початкове рівняння має корені http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image726.jpg

Приклад 2. Розв’яжіть рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image727.jpg

Розв’язання. Оскільки http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image728.jpg то маємо рівняння http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image729.jpg

Зробимо заміну х2 + 2х = t. Маємо рівняння для t: http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image730.jpg

Розв’язавши його, дістанемо t1 = 4; t2 = -1. Повернемося до змінної х.

http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image731.jpg

Отже, початкове рівняння має корені http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image732.jpg